

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE
APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN



AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

PROBLEME

Indice de Gini

On étudie la répartition des salaires d'une population de N habitants. Pour chaque tranche de 1000 F, on connaît le nombre de personnes dont le salaire est dans cette tranche. Plus précisément, on note x_i la valeur du milieu de l'intervalle i de sorte que $x_1=500$ F, $x_2=1500$ F, ... $x_{10}=9500$ F. La tranche i correspond donc à l'intervalle $[x_i-500; x_i+500[$. On note n_i le nombre de personnes dans la tranche i . On observe les valeurs suivantes :

i	x_i	intervalle	n_i
1	500	$[0; 1000[$	10
2	1500	$[1000; 2000[$	25
3	2500	$[2000; 3000[$	106
4	3500	$[3000; 4000[$	155
5	4500	$[4000; 5000[$	363
6	5500	$[5000; 6000[$	224
7	6500	$[6000; 7000[$	75
8	7500	$[7000; 8000[$	22
9	8500	$[8000; 9000[$	18
10	9500	$[9000; 10000[$	2

- ❶ Quelle est la taille totale N de la population ?
- ❷ Quelle est la moyenne empirique des salaires ?
- ❸ Quelle est la variance des salaires ?

On note N_j la somme cumulée des n_i pour $i = 1, \dots, j$, c'est à dire : $N_j = \sum_{i=1}^j n_i$.

On note N'_j cette quantité ramenée à une échelle de 0 à 1, c'est à dire :

$$N'_j = \frac{N_j}{N_{10}}.$$

On note $y_i = n_i \times x_i$ et Y_j la somme cumulée des y_i pour $i = 1, \dots, j$, c'est à dire :

$$Y_j = \sum_{i=1}^j y_i.$$
 et Y'_j cette quantité ramenée à une échelle de 0 à 1, c'est à dire : $Y'_j = \frac{Y_j}{Y_{10}}.$

On prendra par ailleurs $N_0 = 0$, $N'_0 = 0$, $y_0 = 0$, $Y_0 = 0$ et $Y'_0 = 0$.

Soit C_j les points du plan cartésien de coordonnées (N'_j, Y'_j) , avec C_0 de coordonnées $(0,0)$.

❹ Donner dans un tableau les coordonnées des points C_j avec quatre décimales, en arrondissant au plus proche.

On appelle ligne de concentration la ligne obtenue en joignant les points C_j . Soit O le point de coordonnées $(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(1,1)$.

❺ Tracer sur une même figure la ligne de concentration, les points O , A , B et la première bissectrice OB . On prendra comme unité $OA = AB = 10$ cm.

❻ Comment se situe la ligne de concentration par rapport au triangle OAB , quels que soient les effectifs dans chaque tranche ? (On montrera que la ligne de concentration est convexe).

On appelle indice de Gini, noté I , le rapport de l'aire comprise entre le segment OB et la ligne de concentration et l'aire du triangle OAB .

$$I = \frac{\text{aire entre } OB \text{ et ligne de concentration}}{\text{aire du triangle } OAB}.$$

⑦ Calculer l'aire définie par OAB .

Soit D_j les points du plan cartésien de coordonnées (N'_j, N'_j) .

⑧ Placer les points D_j sur la figure en remarquant que $D_0 = C_0 = O$ et $D_{10} = C_{10} = B$.

⑨ Calculer l'aire a_j définie par le quadrilatère $D_{j-1}D_jC_jC_{j-1}$ en fonction de N'_{j-1} , N'_j , Y'_{j-1} et Y'_j .

⑩ Calculer l'aire comprise entre la ligne de concentration et la droite OB en fonction des n_j et des Y'_j .

⑪ Donner la valeur de l'indice de Gini I pour les valeurs du tableau avec trois décimales.

⑫ Si tous les salaires étaient égaux, combien vaudrait I ?

⑬ Si tous les salaires étaient nuls sauf un, égal à 9800 F combien vaudrait I ?

Soit α un réel tel que $\alpha \geq 1$. On note f_α la fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f_\alpha(x) = x^\alpha$

⑭ Tracer la courbe représentative de $f_{2,5}$ sur le graphe précédent.

⑮ Calculer l'aire entre le segment OB et la courbe de f_α ; donner l'indice de Gini correspondant que l'on notera I_α .

⑯ Pour quelle valeur de α a-t-on égalité entre I_α et l'indice I calculé à la question ⑪ ? Tracer cette courbe sur le graphique précédent.

EXERCICE

① Résoudre dans \Re l'équation d'inconnue x

$$\sqrt{a - \sqrt{x}} + \sqrt{a + \sqrt{x}} = \sqrt[4]{bx}.$$

② Calculer x si l'on donne $a = 1,875$ et $b = 15,678$.