## CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
## VOIE A

## CORRIGE DE L'EPREUVE CALCUL NUMERIQUE

### EXERCICE n° 1

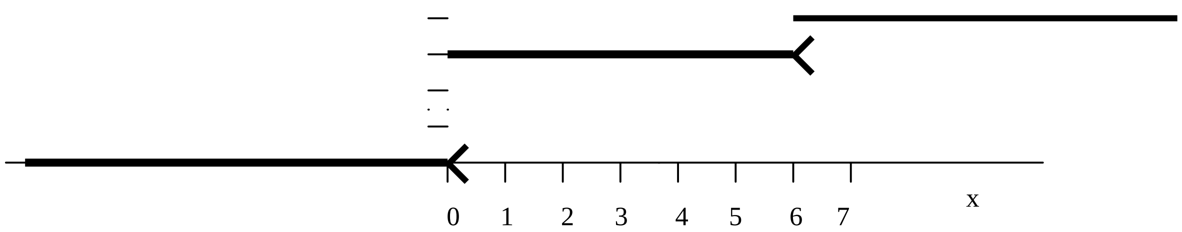
1.

a. Le tableau **T1** donne la loi de probabilité de X puisqu'il croise les valeurs possibles prises par X et les probabilités correspondantes.

| Valeurs de X notées k | 0 | 6 |
|---|---|---|
| P(X=k) | ¾ | 1/4 |

b. E(X) = 0 * (3/4) + 6 * (1/4) = 3/2.
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 36/4 - 9/4 = 25/4$.

c. Soit F, la fonction de répartition de X :
pour tout x < 0, F(x) = 0
F(0)= 3/4; pour tout x tel que 0 <x < 6, F(x) = 3/4 ;
F(6) = 1 et pour tout x > 6 F(x) = 1.




2. On jette maintenant 5 fois de suite le dé.

$$P(\text{"}au\ moins\ 1\ fois\ X = 0\text{"}) = 1 - P(\text{"}aucune\ fois\ X = 0\text{"})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1023}{1024}$$

3. On suppose à présent que le nombre de lancers du dé est un entier n strictement positif. On cherche à déterminer $n_0$ tel que pour tout n supérieur ou égal à $n_0$, on a

On en déduit que le nombre minimal cherché est égal à 9.

**EXERCICE n° 2**

1. **Premier encadrement.**

a.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{10+x}\,dx = \ln(10+x)]_0^1 = \ln\left(\frac{11}{10}\right)$$

b. La suite $x^n$ étant décroissante pour x dans [0,1], on obtient l'inégalité suivante

$$x^n \geq x^{n+1}$$

On en déduit que

$$I_n \geq I_{n+1}, \quad \forall\, n \in IN,$$

c'est à dire que la suite $(I_n)_{n \in IN}$ est décroissante.

c. Lorsque x ϵ [0,1], $10 \leq 10 + x \leq 11, \quad et$

$$\frac{x^n}{11} \leq \frac{x^n}{10+x} \leq \frac{x^n}{10}.$$

En intégrant sur [0,1] les 3 quantités ci-dessus, on obtient le résultat demandé.

2. **Deuxième encadrement.**

a. Etant donnée la décroissance de la suite $I_n$, on a directement une minoration de $I_n - I_{n+1}$ par 0. Pour tout x ϵ [0,1], on a

$$10 \leq 10 + x \leq 11, \quad et$$

$$\frac{1}{11} \leq \frac{1}{10+x} \leq \frac{1}{10}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10}\int_0^1 x^n\,(1-x)\,dx = \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)},$$

la dernière égalité s'obtient en faisant une intégration par parties en posant
$u' = x^n$ et $v = (1- x)$.

L'encadrement de $I_n - I_{n+1}$ est

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}.$$

b. La relation de récurrence s'obtient de la façon suivante

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{10+x}\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 \frac{10+x-10}{10+x}\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 (1-\frac{10}{10+x})\, x^{n-1}\, dx = \int_0^1 x^{n-1}\, dx - 10 \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{10+x}\, dx$$

$$= \frac{1}{n} - 10\, I_{n-1}.$$

c. Les questions 2.a et 2.b conduisent à

$$0 \le I_n - I_{n+1} \le \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)} \Leftrightarrow 0 \le I_n - \frac{1}{n+1} + 10\, I_n \le \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{11\,(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{11\,(n+1)} + \frac{1}{110\,(n+1)\,(n+2)}.$$

3.

a. Pour l'encadrement de la question 1., on obtient l'erreur absolue $\Delta_{n,1}$ égale à

$\Delta_{n,1}$=1/ (110 * (n+1)), l'erreur relative $\xi_{n,1}$ est égale à $\xi_{n,1}$ = 1/10.

Pour l'encadrement de la question 2., on obtient l'erreur absolue $\Delta_{n,2}$ égale à

$\Delta_{n,2}$=1/ (110 * (n+1) * (n+2)), l'erreur relative $\xi_{n,2}$ est égale à
$\xi_{n,2}$=1/(10*(n+2)).

b. On pose n=36. La valeur approchée de $I_{36}$ est 1/(11*37).
L'erreur relative est :

- pour le premier encadrement : 0.1
- pour le deuxième encadrement : 1/(380) = 0.003.

**EXERCICE n° 3**

Remarquons que $a_n > 0$ et que $b_n > 0$ pour tout n ϵ IN.

Montrons que pour tout n positif ou nul, $a_n$ est inférieur ou égal à $b_n$ :
C est vrai à l'étape n=0 par hypothèse ; montrons le à l'étape n+1.

$$(a_n - b_n)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a_n + b_n)^2 \ge 4\, a_n\, b_n \Leftrightarrow \frac{a_n + b_n}{2} \ge \sqrt{a_n\, b_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \le b_{n+1}.$$

La suite ($a_n$) est une suite croissante et la suite ( $b_n$) est décroissante :

$$a_n = \sqrt{a_n^{\ 2}} \leq \sqrt{a_n \ b_n} = a_{n+1}.$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0.$$

Montrons que lim ( $a_n$ - $b_n$ )=0 quand n tend vers l'infini :

$$0 \leq b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} < \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad \to 0, \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Les suites $a_n$ et $b_n$ sont donc adjacentes.