ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère un dé tétraédrique régulier dont les quatre faces sont numérotées de 0 à 3. Soit X la variable aléatoire égale au produit des numéros des 3 faces visibles du dé.

❶

a. Faire le tableau **T1** croisant les valeurs de la variable X et les probabilités de X correspondantes.
b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X, et la variance V(X) de X.
c. Tracer la fonction de répartition de X.

❷ On jette le dé cinq fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement "X=0"?

❸ Soit n un entier strictement positif. Déterminer n_0 le nombre minimal de lancers du dé, tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement "X=0" dépasse 0.99999.

Fomesoutra.com
ça soutra !

EXERCICE n° 2

On cherche à approcher numériquement l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x} dx, \quad n \in IN.$

❶ **Premier encadrement.**

a. Calculer I_0 .
b. Montrer que $(I_n)_{n \in IN}$ est une suite décroissante.
c. Montrer que pour tout n ϵ IN,

$$\frac{1}{11\,(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10\,(n+1)}.$$

❷ **Deuxième encadrement.**

a. Montrer que

$$0 \leq I_n - I_{n+1} \leq \frac{1}{10\,(n+1)\,(n+2)}.$$

b. Etablir pour tout n > 0 une relation de récurrence exprimant I_n en fonction de I_{n-1}.
c. Déduire des questions 2.a et 2.b que pour tout n ϵ IN,

$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{11(n+1)} + \frac{1}{110(n+1)(n+2)}.$$

❸ On fait l'approximation

$$I_n \approx \frac{1}{11\,(n+1)}.$$

Soit Δ_n l'erreur absolue définie par

$$\Delta_n = \beta(n) - \frac{1}{11\,(n+1)},$$

où $\beta(n)$ est la borne supérieure dans l'encadrement de I_n. Soit ξ_n, l'erreur relative définie par

$$\xi_n = \frac{\Delta_n}{I_n}.$$

a. Calculer pour l'encadrement de chacune des questions 1 et 2 l'erreur absolue.

b. On pose n=36 . Donner la valeur approchée de I_{36} ; pour chacun des encadrements, calculer l'erreur relative lorsqu'on fait une approximation de I_{36}.

EXERCICE n° 3

On dit que deux suites (a_n) et (b_n) pour tout n $\in$ IN, sont **adjacentes** si et seulement si :

- a_n est inférieur ou égal à b_n pour tout n $\in$ IN
- (a_n) est une suite croissante
- (b_n) est une suite décroissante
- et la suite $(b_n - a_n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies comme suit sont adjacentes :

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n\ b_n}, \quad a_0 = a; \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_0 = b, \qquad avec \quad 0 < a < b.$$