CORRECTION
EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
ITS A

Exercice 1:

1.
T1

$X = x_i$	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	1/6	1/3	1/2

T2

$Y = y_i$	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	1/2	1/3	1/6

T3

$Z = z_i$	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

2.

$\mathbb{E}(X) = 10/3,\ \mathbb{E}(Y) = 5/3,\ \mathbb{E}(Z) = 5$ $\qquad$ $\text{Var}(X) = 5/9,\ \text{Var}(Y) = 5/9,\ \text{Var}(Z) = 5/3.$

3. On note F la fonction de répartition de Z. Cette fonction est définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 3 \\ 1/6 \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ 1/3 \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ 2/3 \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ 5/6 \text{ si } 6 \leq x < 7 \\ 1 \text{ si } 7 \leq x \end{cases}$$

Exercice 2.

1.

PREMIERE FORMULE

Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; on vérifie qu'elle est vraie pour $n = 2$ et en la supposant vraie pour n, montrons qu'elle est satisfaite pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

DEUXIEME FORMULE

Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; on vérifie qu'elle est vraie pour $n = 2$ et la supposant vraie pour n, montrons qu'elle est satisfaite pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

2.

$$\begin{aligned}C_n^{p+1} + C_n^p &= \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n!(n-p)}{(n+1-p-1)!(p+1)!} + \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} \\ &= \frac{n![(n-p) + (p+1)]}{(n-p)!(p+1)!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!(n+1)}{(n-p)!(p+1)!}\\
&= C_{n+1}^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration.

Exercice 3.

1.

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\mu_n^2-2\mu_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\\
&= \frac{q_n}{n}+\mu_n^2-2\mu_n^2\\
&= \frac{q_n}{n}-\mu_n^2
\end{aligned}
$$

2.1.a. On établit la première égalité comme suit :

$$
\begin{aligned}
(n+1)\sigma_{n+1}^2-n\sigma_n^2 &= \sum_{k=1}^{n+1}(x_k-\mu_{n+1})^2-\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_{n+1}-\mu_n+\mu_n)^2-\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)^2+(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2\\
&= -2(\mu_n-\mu_{n+1})\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)+n(\mu_n-\mu_{n+1})^2+(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2\\
&= n(\mu_n-\mu_{n+1})^2+(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2,
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité a lieu car $\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k-n\mu_n=n\mu_n-n\mu_n$.
La deuxième égalité s'obtient facilement en écrivant :

$$
(n+1)\mu_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}=n\mu_n+x_{n+1}.
$$

2.1.b. De **2.1.a.**, on en déduit que

$$
\sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\sigma_n^2+\frac{n}{n+1}(\mu_{n+1}-\mu_n)^2+\frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\mu_{n+1})^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(\mu_{n+1} - \frac{n+1}{n}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{n}{n+1}(-\frac{1}{n}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{(n+1)n}(\mu_{n+1} - x_{n+1})^2 + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2 \\
&= \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{n}(\mu_{n+1} - x_{n+1})^2.
\end{aligned}
$$

2.2. Le calcul de la moyenne se fait directement en utilisant la formule de la moyenne de l'énoncé et la première relation établie à l'**Exercice 2.**

$$
\begin{aligned}
n\mu_n &= \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(1 + \varepsilon\frac{2k-n-1}{n-1}) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n} k) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{2n(n+1)}{2(n-1)}) \\
&= n + \varepsilon(-n\frac{n+1}{n-1} + \frac{n(n+1)}{(n-1)}) \\
&= n.
\end{aligned}
$$

La valeur de μ_n est $\mu_n = 1$.

A partir de la relation **2.1.a.**, on peut aussi établir par récurrence la relation :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \mu_k = 1 - \varepsilon(1 - \frac{k-1}{n-1}).$$

En conséquence de quoi, on a

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ x_k - \mu_k = \varepsilon\frac{k-1}{n-1}. \tag{1}$$

On va utiliser cette relation pour calculer la variance de la suite. Pour ce qui concerne la variance, nous faisons un raisonnement par récurrence en utilisant la formule établie à la question **2.1.b.** et (1) : étudions les cas où $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= 0, \\
\sigma_2^2 &= (x_2-\mu_2)^2 = \frac{(2-1)^2\varepsilon^2}{(n-1)^2}, \\
\sigma_3^2 &= \frac{2}{3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + 2\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}, \\
\sigma_4^2 &= \frac{3.2}{4.3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3}{4}(3-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + (4-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}, \\
\sigma_5^2 &= \frac{4.3.2}{5.4.3}(2-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4.3}{5.4}(3-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4}{5}(4-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + (5-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Supposons la relation de récurrence : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$
\sigma_k^2 = \frac{2.(2-1)}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3.2}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{4.3}{k}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \ldots + (k-1)\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2}.
$$

On a établit que pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$ l'hypothèse de récurrence est satisfaite, supposons la vraie à l'étape k et montrons qu'elle reste vraie à l'étape $k+1$; en utilisant la formule établie à la question **2.1.b.** et la relation (1), on a :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{k+1}^2 &= \frac{k}{k+1}\sigma_k^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon\, k}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{k}{k+1}\sigma_k^2 + k\left(\frac{\varepsilon}{n-1}\right)^2 \\
&= \frac{2.(2-1)}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \frac{3.2}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{k(k-1)}{k+1}\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2} + k\frac{\varepsilon^2}{(n-1)^2};
\end{aligned}
$$

la relation de récurrence est à présent établie. Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)\varepsilon^2}{n(n-1)^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{n(n-1)^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^2 n(n+1)(n-1)}{3n(n-1)^2} \\
&= \frac{\varepsilon^2 (n+1)}{3(n-1)} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{3}\left(1+\frac{2}{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

La valeur de σ_n^2 est égale à $\sigma_n^2 = \frac{\varepsilon^2}{3}(1+\frac{2}{n-1})$ pour tout $n > 1$.

Exercice 3. En posant $u = \ln(t)$ et $v' = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(t)dt &= [\ln(t)t]_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{t}dt \\
&= \ln(2).2 - [1]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 1 \\
&= 0.386
\end{aligned}
$$