EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE
CONCOURS 2001
ITS A – 2H

Exercice 1. : Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages sans remise. Soient X, Y et Z les variables aléatoires représentant respectivement le plus grand, le plus petit et la somme des deux numéros obtenus.

1. Faire les tableaux **T1**, **T2** et **T3** croisant les valeurs des variables X, Y et Z et leurs probabilités correspondantes.

2. Calculer les espérances mathématiques et les variances de X, Y et Z.

3. Déterminer la fonction de répartition de Z.

Exercice 2. :

1. Démontrer les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Indication : on pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

2. On rappelle que pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, établir une relation reliant la quantité C_{n+1}^{p+1} aux quantités C_n^p et C_n^{p+1}.

Exercice 3. : Etant donnée une suite x_k, $k = 1, \ldots, n$, de réels, on note μ_n sa moyenne et σ_n^2 sa variance définies par

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_n)^2.$$

1. Première expression de la variance.

On pose

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

.

Exprimer σ_n^2 en fonction de q_n et de μ_n.

2. Deuxième expression de la variance.

2.1.

a. Etablir les égalités :

$$(n+1)\ \sigma_{n+1}^2 = n\ \sigma_n^2 + n\ (\mu_{n+1} - \mu_n)^2 + (x_{n+1} - \mu_{n+1})^2,$$

$$(n+1)\ \mu_{n+1} = n\mu_n + x_{n+1}.$$

b. En déduire

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1}\sigma_n^2 + \frac{1}{n}(x_{n+1} - \mu_{n+1})^2.$$

2.2. On considère une suite de réels $x_k = 1 + \varepsilon\frac{2k-n-1}{n-1},\ k = 1, \ldots, n\ (n > 1)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$. A partir des relations obtenues à la question **2.1.** et des formules établies à l'**Exercice 2.**, déterminer sa moyenne et sa variance.

Exercice 4. : En faisant une intégration par parties, calculer l'intégrale suivante

$$\int_1^2 \ln(t)dt.$$