ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE
APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE
APPLIQUEE
YAOUNDE–CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Problème : Dans un magasin de vente de cuisines équipées, on veut étudier la liaison entre le nombre x d'appels téléphoniques de personnes intéréssées par les cuisines (x est donné en centaines d'appels) et le chiffre d'affaires réalisé y (y est donné en 2000 Euros). Les résultats simplifiés sont présentés dans le tableau ci-dessous, où les n_{ij} représentent le nombre de semaines où le magasin a reçu x_i appels téléphoniques et a fait y_j de chiffre d'affaires.

	$y_1 = 1$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$
$x_1 = 2$	4	3	2	0
$x_2 = 3$	2	3	4	1
$x_3 = 6$	0	4	5	3
$x_4 = 7$	0	5	7	7

1 Tableau.

On définit les quantités :

$$\begin{aligned} n_{.j} &= \sum_{i=1}^{4} n_{ij}, \quad \forall j = 1, \ldots, 4, \\ n_{i.} &= \sum_{j=1}^{4} n_{ij}, \quad \forall i = 1, \ldots, 4, \end{aligned}$$

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_{i.}, \quad n \text{ est l'effectif total.}$$

et

1. Que représentent les quantités $n_{2.}$ et $n_{.3}$?
2. Calculer $\tilde{n} = \sum_{j=1}^{4} n_{.j}$. En déduire une relation entre $\tilde{n}$ et n.
3. Dresser un tableau en complétant celui qui est dans l'énoncé comme suit :

   a. dans la sixième colonne, on calculera les quantités $n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la septième colonne, on calculera les produits $x_i n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la huitième colonne, on calculera les produits $x_i^2 n_{i.}$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$; dans la neuvième colonne, on calculera les quantités $x_i \sum_{j=1}^{4} n_{ij} y_j$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$.

   b. sur la sixième ligne, on calculera les quantités $n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la septième ligne, on calculera les produits $y_j n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la huitième ligne, on calculera les produits $y_j^2 n_{.j}$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$; sur la neuvième ligne, on calculera les quantités $y_j \sum_{i=1}^{4} n_{ij} x_i$ pour tout $j = 1, \ldots, 4$.

2 Moyenne, Variance, Covariance.

On définit les moyennes marginales $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$ par :

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_{i.}\, x_i,$$

et

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, y_j.$$

On définit les variances marginales $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$ par :

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} n_{i.}\, x_i^2 - \bar{\bar{x}}^2,$$

et

$$\mathrm{V}(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{4} n_{.j}\, y_j^2 - \bar{\bar{y}}^2.$$

On définit les écart-types marginaux de x et de y comme étant les racines carrés de $\mathrm{V}(x)$ et de $\mathrm{V}(y)$ respectivement.

On définit la covariance $\mathrm{Cov}(x, y)$ entre x et y par :

$$\mathrm{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} n_{ij}\, x_i\, y_j - \bar{\bar{x}}\, \bar{\bar{y}}.$$

A partir du tableau établi à la question **1.**3.,

1. Calculer $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$. Quelle est la signification de ces deux quantités ?

2. Calculer les variances marginales $\mathrm{V}(x)$ et $\mathrm{V}(y)$. En déduire les écart-types marginaux de x et de y, exprimés avec leurs unités naturelles.

3. Calculer la covariance entre x et y.

4. Déduire de la question précédente le coefficient de corrélation linéaire r entre x et y défini par
$$r = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}}.$$

3 Droites d'ajustement.

On appelle droite d'ajustement de y en x, la droite D1 d'équation :
$$y = ax + b,$$
avec $a = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(x)}$ et $b = \bar{\bar{y}} - a\,\bar{\bar{x}}$.

On appelle droite d'ajustement de x en y, la droite D2 d'équation :
$$x = a'y + b',$$
avec $a' = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathrm{V}(y)}$ et $b' = \bar{\bar{x}} - a'\,\bar{\bar{y}}$.

1. Etablir les équations des droites d'ajustement D1 et D2.

2. Sur un même graphique et dans un même repère rectangulaire avec les x en abscisses et les y en ordonnées, tracer les droites D1 et D2. Représenter sur le graphique, le point $\mathrm{G} = (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$.

Exercice 1. : Un dé est truqué de façon à ce que les probabilités de chaque face soient proportionnelles à leur numéro, avec le même coefficient de proportionnalité pour toutes les faces.

1. On jette le dé une fois et on note X le numéro obtenu. Dresser un tableau dans lequel figureront sur la première ligne les valeurs possibles de X, et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. On jette le dé deux fois, et on note Y la somme des numéros obtenus. Dresser un tableau dans lequel figureront sur la première ligne les valeurs possibles de Y, et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exercice 2. : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \mathrm{E}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[, \end{cases}$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Tracer le graphe de la fonction f.

2. Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.