ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
BP 5084
DAKAR–SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
BP 296
YAOUNDE–CAMEROUN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice

1. Déterminer les nombres complexes z qui sont solutions de l'équation :
$$z^2 = 1 + i. \tag{0.1}$$
2. Représenter graphiquement les nombres complexes z solutions de (0.1).
3. Ecrire les complexes z solutions de l'équation (0.1) sous forme exponentielle et sous forme algébrique pour en déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
4. A partir de la forme exponentielle de $1+i$, calculer $(1+i)^8$; calculer ensuite $(1+i)^8$ à l'aide de la formule du binôme et en déduire les valeurs respectives de $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$ et de $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$.
5. Linéariser $\cos^4(a)$ et $\sin^3(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
6. Exprimer $\cos(6x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de puissances de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème

Une entreprise P est constituée de deux établissements P_1 et P_2. Le tableau suivant donne la répartition des salaires (x_{1i} pour l'entreprise P_1 et x_{2i} pour l'entreprise P_2, tous les salaires sont exprimés en Euros) en fonction des effectifs salariés (n_{1i} pour l'entreprise P_1 et n_{2i} pour l'entreprise P_2); les salaires sont regroupés par classe et on notera une classe $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[$, où a_i est la borne inférieure des salaires appartenant à $\mathcal{C}_i$ et b_i est la borne supérieure des salaires appartenant à $\mathcal{C}_i$:

	x_{1i}	n_{1i}	x_{2i}	n_{2i}
Ouvriers	$\mathcal{C}_2 = [1200, 1500[$	60	$\mathcal{C}_1 = [900, 1200[$	5
Employés	$\mathcal{C}_4 = [1800, 2100[$	95	$\mathcal{C}_3 = [1500, 1800[$	15
Cadres	$\mathcal{C}_6 = [2700, 3300[$	5	$\mathcal{C}_5 = [2100, 2700[$	30

1. Donner le nombre total des salariés de l'entreprise P. On notera ce nombre n.

2. Regrouper les résultats des deux établissements dans un unique tableau avec dans la première colonne les classes $\mathcal{C}_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, des salaires ordonnés par ordre croissant et dans la deuxième colonne les effectifs n_i des salariés correspondants.

3. Ajouter une troisième colonne au tableau de la question 2. dans laquelle apparaîtront **les fréquences** $f_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$.
La fréquence *f_i de la classe $\mathcal{C}_i$ est la proportion des individus ayant un salaire compris dans l'intervalle $[a_i, b_i[= \mathcal{C}_i$.*

4. **Fréquence cumulée et Médiane.**

   a. Ajouter une quatrième colonne au tableau de la question 2. dans laquelle apparaîtront pour chaque classe $\mathcal{C}_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, **la fréquence cumulée** F_i définie par la formule
$$F_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i} f_j, & \text{si} \quad 2 \leq i \leq 6 \\ f_1 & \text{si} \quad i = 1 \end{cases}$$

   b. Quelle est la proportion de salariés de l'entreprise P qui gagne moins de 1800 Euros?

   c. La représentation graphique de la fréquence cumulée est appelée **courbe cumulative**; elle consiste à représenter en abscisse les bornes inférieures et supérieures des classes $\mathcal{C}_i,\ i = \{1, \ldots, 6\}$, puis à représenter dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le point $(a_1, 0)$ où a_1 est la borne inférieure de la classe $\mathcal{C}_1$, et les points $(b_i, F_i),\ i = \{1, \ldots, 6\}$, où b_i est la borne supérieure de la classe $\mathcal{C}_i$ et enfin à relier ces points par des segments de droite.
Tracer **la courbe cumulative**.

   d. Déterminer graphiquement **la médiane**, c'est–à–dire, sur le graphe de la courbe cumulative, repérer la valeur du salaire en abscisse qui a une ordonnée égale à 0.5, puis donner une valeur approchée de Me.
La médiane *notée Me est la valeur d'un salaire qui partage les salariés de P en deux sous-populations de même taille : ceux qui ont un salaire supérieur à Me et ceux qui ont un salaire inférieur à Me.*

5. **Histogramme et Mode.**

   a. Ajouter une cinquième colonne au tableau de la question 2., dans laquelle apparaîtront **les amplitudes** $L_i,\ i \in \{1, \ldots, 6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, c'est–à–dire la longueur de chaque intervalle $[a_i, b_i[$.

b. Ajouter une sixième colonne au tableau de la question 2., dans laquelle apparaîtront ou bien **les densités de fréquence** $h_i,\ i \in \{1,\ldots,6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, qui sont le rapport de f_i sur L_i, ou bien des quantités $H_i,\ i \in \{1,\ldots,6\}$ de chaque classe $\mathcal{C}_i$, proportionnelles à h_i (chacun étant libre de choisir son coefficient de proportion).

c. La représentation graphique de la densité de fréquence est appelée **histogramme**; elle consiste à représenter en abscisse les classes $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[,\ i \in \{1,\ldots,6\}$, et pour chaque classe $\mathcal{C}_i$, on dessine un rectangle de hauteur h_i repérée en ordonnée.
Tracer l'histogramme dans un repère différent de celui utilisé pour tracer la courbe cumulative.

d. A partir de l'histogramme, déterminer **la classe modale** qui est la classe de l'histogramme qui a la plus grande hauteur de rectangle.

6. **Moyenne et Variance.**

a. Par convention on admet que chaque classe $\mathcal{C}_i = [a_i, b_i[,\ i \in \{1,\ldots,6\}$, peut être représentée par **la valeur centrale** c_i, qui est le centre ou milieu de $[a_i, b_i[$.
Calculer **les valeurs centrales** $c_i\ i \in \{1,\ldots,6\}$, de chaque classe $\mathcal{C}_i$, que l'on fera figurer dans une septième colonne ajoutée au tableau de la question 2.

b. On définit **la moyenne** $\bar{x}$ par :

$$\bar{x} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i\, c_i,$$

et **la variance totale** Var par :

$$\mathrm{Var} \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i\, (c_i - \bar{x})^2,$$

Calculer la moyenne $\bar{x}$ et la variance totale Var.

c. On appelle **variance Inter** et on la note VarInter, la variance des moyennes de la population P_1 et de la population P_2 c'est–à–dire que

$$\mathrm{VarInter} = \frac{1}{n}(\bar{n}_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + \bar{n}_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2),$$

où $\bar{x}_i,\ i = 1, 2$, est la moyenne calculée sur la population P_i et $\bar{n}_i$ est l'effectif de la population P_i.
Calculer la variance Inter.

d. On appelle **variance Intra** et on la note VarIntra, la moyenne des variances de la population P_1 et de la population P_2 c'est–à–dire que

$$\mathrm{VarIntra} = \frac{1}{n}(\bar{n}_1\mathrm{Var}_1 + \bar{n}_2\mathrm{Var}_2),$$

où $\mathrm{Var}_i,\ i = 1, 2$, est la variance calculée sur la population P_i et $\bar{n}_i$ est l'effectif de la population P_i.
Calculer la variance Intra.

e. Trouver la relation théorique qui relie la variance totale aux variances Intra et Inter.