ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
DÉPARTEMENT DE LA STATISTIQUE
ET DE LA DÉMOGRAPHIE
ENEA-DSD - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE ET
D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Fomesoutra.com
ça soutra !

Exercice 1

150 clients font la queue au guichet d'un cinéma; le guichetier n'a aucune monnaie disponible dans sa caisse. Le billet coûte 5 euros: 80 clients disposent de billets de 5 euros, les 70 autres clients ont uniquement un billet de 10 euros. On modélise le problème en définissant 150 variables $X_i,\ i \in \{1, \ldots, 150\}$ par :

$$X_i = \begin{cases} \ \ 1 & \text{si le client } i \text{ a un billet de 5 euros,} \\ -1 & \text{si le client } i \text{ a uniquement un billet de 10 euros.} \end{cases}$$

A. On représente le nombre de billets de 5 euros disponibles dans la caisse après le passage du $k$ème client par la variable S_k définie pour tout $k \in \{0, \ldots, 150\}$ par

$$S_k = \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_k & \text{si} \quad k \in \{1, \ldots, 150\}, \\ 0 & \text{si} \quad k = 0. \end{cases}$$

Si tous les clients peuvent être servis, c'est-à-dire si le guichetier peut toujours rendre la monnaie à un client qui se présente avec un billet de 10 euros, combien y-a-t-il de billets de 5 euros et de billets de 10 euros dans la caisse après le passage des 150 clients ?

B. On peut définir dans un repère orthogonal une trajectoire partant du point $(0, 0) = (0, S_0)$ et joignant par des segments de droite les points (k, S_k) pour tout $k \in \{1, \ldots, 150\}$.

1. Tracer une trajectoire possible dans un repère orthogonal allant de $(0, 0) = (0, S_0)$ à $(5, 1) = (5, S_5 = 1)$.

2. Exprimer sous forme d'une condition sur la trajectoire le fait que le guichetier puisse satisfaire tous les clients.

3. On s'intéresse dans cette question uniquement aux 100 premiers clients, c'est-à-dire aux valeurs prises par les variables $X_1, \ldots, X_{100}$. On note $p \in \mathbb{N}$ le nombre des $X_i,\ i \in \{1, \ldots, 100\}$ qui prennent la valeur 1 et on note $q \in \mathbb{N}$ le nombre des $X_i,\ \in \{1, \ldots, 100\}$ qui prennent la valeur -1. Donner les valeurs de p et q pour que la trajectoire atteigne le point $(100, 10)$.

Exercice 2

Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres rationnels définie par

$$x_m \quad = \quad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(m-1)!}+\frac{1}{m!}, \tag{0.1}$$

où $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 1$ est le produit des k premiers entiers non nuls, défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec la convention $0! = 1$.
Le nombre irrationnel e est représenté par la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ car il peut s'écrire :

$$e \quad = \quad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}. \tag{0.2}$$

Le but de cet exercice est de trouver une approximation du nombre irrationnel e.

1. Quelle est la nature de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par (0.1) : est–elle croissante ou bien est–elle décroissante ou bien est–elle ni croissante et ni décroissante? On justifiera sa réponse.

2. Pour $m \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, et $n > m$, calculer $|x_n - x_m|$.

3. Dans le terme $|x_n - x_m|$ déterminé à la question **2.**, mettre la quantité $\dfrac{1}{(m+1)!}$ en facteur.

4. En utilisant le fait que pour tout entier k tel que $1 < k \leq n-m$, on a $\dfrac{1}{m+k} < \dfrac{1}{m+1}$, et à partir de la question **3.**, déduire une majoration pour $|x_n - x_m|$.

5. Déterminer la valeur de la quantité S_{n-m-1} définie par

$$S_{n-m-1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n-m-1}\frac{1}{(m+1)^k}. \tag{0.3}$$

Fomesoutra.com ça soutra !

Indication : il faut remarquer que S_{n-m-1} est la somme des $(n-m)$ premiers termes d'une suite géométrique.

6. Déduire de la question **5.**, la limite quand n tend vers l'infini de S_{n-m-1}, avec $m \geq 1$ fixé.

7. On va dans cette question déterminer un encadrement pour le nombre e.

a. En utilisant l'écriture de e donnée par la relation (0.2), exprimer $|e - x_m|$, pour un $m \in \mathbb{N}^\star$ quelconque.

b. Reprendre les questions **3.**, **4.** et **5.**, pour en déduire une majoration de $|e - x_m|$.

c. En prenant $m = 15$, donner en utilisant la majoration de la question **7.b.**, un encadrement pour e. En déduire une valeur approchée pour e pour laquelle on spécifiera la précision.

Exercice 3

En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à la fonction $\ln(1+x)$ définie pour $x > -1$, déterminer un encadrement de $\ln(2)$.

Exercice 4

1. **a.** Trouver les réels a, b et c tels que

$$\frac{x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   b. A partir de **1.a.**, déterminer la primitive de $\dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$, pour $x \in \mathbb{R}$ puis la primitive de $\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

2. En faisant le changement de variable $t = \tan(x)$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+3(\cos x)^2}dx$.

Fomesoutra.com
ça soutra !

Exercice 5

Dans la forêt de la Reine en Meurthe et Moselle, on veut étudier si la croissance des chênes est la même dans toutes les parties de la forêt.
Pour ce faire on compare la croissance des chênes dans 8 différentes zones choisies au hasard : ces zones seront dénommées par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H.
On classe les chênes en 3 classes suivant leur diamètre :

inférieur strictement à 10 cm   compris entre 10 cm et 20 cm   supérieur strictement à 20 cm

On note pour chaque zone le nombre de chênes appartenant à chacune des classes. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant : on notera N_{ij} le nombre de chênes observés se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. La donnée de ces effectifs observés représente la distribution empirique des chênes.

	diamètre $<$ 10 cm	10 cm $\leq$ diamètre $\leq$ 20 cm	diamètre $>$ 20 cm
A	5	18	28
B	22	29	24
C	19	37	34
D	15	26	11
E	25	39	40
F	23	26	33
G	18	23	23
H	16	23	24

Le but de cet exercice est de savoir si on peut conclure à partir des données du tableau à l'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes.

1. Quel est le nombre total de chênes observés ? On note n ce nombre.

2. Déterminer les marges du tableau précédent, c'est-à-dire calculer les sous-totaux de chaque ligne et chaque colonne. On ajoutera une ligne et une colonne supplémentaires au tableau et dans chaque nouvelle case on reportera le sous-total calculé de la ligne ou la colonne en question.

3. Pour chaque case du tableau précédent se trouvant à l'intersection de la ligne i $(1 \leq i \leq 8)$ et de la colonne j $(1 \leq j \leq 3)$, on note n_{ij} le nombre de chênes théorique que l'on devrait obtenir si l'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes était vérifiée. La donnée de ces effectifs théoriques représente la distribution théorique des chênes sous l'hypothèse d'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes. Le nombre n_{ij} est égal au produit des marges de la ligne i et de la colonne j divisé par le nombre total n.
Calculer pour toutes les cases du tableau ce nombre n_{ij}. On dessinera un nouveau tableau dans lequel on inscrira ces nombres de chênes théoriques.

4. On va mesurer l'écart entre la distribution théorique et la distribution empirique du nombre de chênes par la fonction Δ définie par

$$\Delta = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{3} \frac{(N_{ij} - n_{ij})^2}{n_{ij}}. \tag{0.4}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !

Calculer la valeur de Δ définie par la relation (0.4).

5. Si on observe une grande valeur de Δ définie par (0.4), pensez-vous que l'on puisse conclure à l'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes?

6. Soit $\alpha = 0.05$. La théorie des probabilités nous assure l'existence d'une valeur $c_\alpha = 23.685$ telle que, sous l'hypothèse qu'il y ait indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes, Δ est strictement inférieure à c_α avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \alpha = 0.95$. On prend alors la décision de :

–accepter l'hypothèse d'indépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes si $\Delta < c_\alpha$

–conclure à la dépendance entre l'emplacement de la zone et la classe de diamètre des chênes si $\Delta > c_\alpha$.
Quelle décision prenez–vous?