

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle positive définie par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

1. Etudier les variations et la convexité de f .

2. Tracer le graphe de f .

3. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.



Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 9e \text{ et } u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$$

On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .

2. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

3. Etudier la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 3

Calculer en fonction de n (où n est un entier strictement positif), l'expression :

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k$$



Exercice n° 4

1. Une grande enveloppe contient les douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 5 cartes simultanément, associe le nombre de rois obtenus.

Déterminer la loi de probabilités de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus avec ces cinq tirages. Déterminer la loi de probabilités de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Problème

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(t) dt = 0$$

Exprimer F à l'aide de la fonction G définie par : $G(x) = \int_0^x f(t) dt$

2. Montrer que les conditions suivantes définissent une unique suite de polynômes (B_n) par :

$$B_0 = 1, \quad B'_{n+1} = B_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.

Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 .

3. Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

4. On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout entier naturel n :

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$$



Comparer les suites (B_n) et (C_n) .

Que peut-on en déduire pour les graphes des B_n et pour les valeurs de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$, lorsque n est impair supérieur ou égal à 3.

5. Montrer que les polynômes B_{2p+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0, 1/2[$.