

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE
APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998



CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE N° 1

On note (E) l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$.

❶ Montrer que (E) admet 3 solutions réelles x_1 , x_2 et x_3 .

❷ Montrer que:

$$x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 = 0$$

et que:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 3$$

❸ On pose $x = 2\cos\alpha$.

Déterminer les valeurs exactes de x_1 , x_2 et x_3 sous forme trigonométrique

EXERCICE N° 2

Soit $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx, n \in \mathbf{N}$

❶ Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique, en cherchant une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n

Calculer la raison q de cette suite et le premier terme I_0 .



❷ La suite (I_n) est-elle convergente ?

❸ Calculer $\square$ en fonction de n

❹ Soit $S_n = \int_0^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$

Etudier la convergence de la suite (S_n)

❺ Calculer I_{n+1} en intégrant par parties et retrouver le fait que (I_n) est une suite géométrique.

❻ Calculer $|I_0 \times I_1 \times \dots \times I_n|$ en fonction de n .

PROBLEME

Soit $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [-3\pi/4, \pi/4]$

❶ Montrer que f est une bijection de l'intervalle $I = [-3\pi/4, \pi/4]$ sur un intervalle J à déterminer

❷ Etudier la continuité et la dérivabilité de la bijection réciproque f^{-1} , de f , sur J

❸ Calculer $f^{-1}(-\sqrt{2}), f^{-1}(\sqrt{2}), f^{-1}(1)$, et $(f^{-1})'(1)$ où $(f^{-1})'$ est la fonction dérivée de f^{-1}

❹ Calculer $(f^{-1})'(x)$ sur l'intervalle de dérivabilité de f^{-1}

⑤ Déduire de ce qui précède , la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\sqrt{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$$



⑥ Montrer que

$$\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{x + \sqrt{2-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \frac{x - \sqrt{2-x^2}}{2}$$

⑦ Montrer par le calcul que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $\left[-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

⑧ ① Montrer que l'équation $f(x) = 2x$ admet une solution unique α dans $]0, \pi/4[$ et que $0,7 < \alpha < 0,8$

$$\textcircled{2} \text{ Soit } h(x) = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{2x}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Montrer que $h(\alpha) = 0$ et que : $\forall x \in]0,7 ; 0,8[$, $|h'(x)| \leq 0,69$.

En déduire un encadrement de $f(x)$ par deux fonctions affines dépendant de α , lorsque $x \in]0,7 ; 0,8[$

③ Calculer $\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos^3\alpha + \sin^3\alpha$, $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$, $1/\cos\alpha + 1/\sin\alpha$, $|\cos\alpha - \sin\alpha|$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\cos 2\alpha$ en fonction de α

⑨ Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt \quad \text{si } x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\quad \text{et par } F(-\sqrt{2}) = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{et } F(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{sur } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

① Montrer que F est définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et dérivable sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

② Calculer $F'(x)$ si $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

③ Montrer que $F = f^{-1}$

⑩ ① Etudier la position de la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, par rapport à sa tangente (T) en un point d'abscisse $x_0 = -\frac{\pi}{4}$

② Si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$, calculer en cm^2 l'aire du domaine

$$\Delta = \left\{ M(x, y) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

③ Calculer en cm^2 l'aire du domaine D limité par l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f^{-1} , les droites d'équations $y = 0$ et $y = \pi/4$

⑪ Soit $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n f(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^{\pi/6} f(x) dx$

① Montrer que la suite (I_n) est convergente

② Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$