CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE A

AVRIL 2001

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

❶ La dérivée de g est $g^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} = k\, x^{\alpha-1} \qquad (k > 0)$
On rappelle que $x^{\alpha} = e^{\alpha Ln(x)} > 0$, donc $g^{'}(x) > 0$ et g est strictement croissante.

Si $\alpha > 1$, $\underset{+\infty}{Lim}\, g = +\infty$ et $\underset{+\infty}{Lim} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. On a donc une branche parabolique dans la direction verticale. D'autre part, $\underset{0}{Lim}\, g = 0$ et on peut prolonger g par continuité en zéro. Le graphe s'en déduit.

Si $0 < \alpha < 1$, $\underset{+\infty}{Lim} \frac{g(x)}{x} = 0$. La branche parabolique est dans la direction horizontale. les autres éléments ne changent pas.
Pour $\alpha = 1$, $g(x) = x\, y^{\beta}$. On a une application linéaire.

❷ Comme $ax + by \leq R$, on a $x \leq \frac{R - by}{a}$. La fonction g étant croissante, le maximum est atteint pour la plus grande valeur de x, à savoir $x = \frac{R - by}{a}$, d'où

$h(y) = \underset{x}{Max}\, f(x, y) = \left(\frac{R - by}{a}\right)^{\alpha} y^{\beta}$ à condition que $\frac{R - by}{a} > 0$, ce qui est vérifié.

❸ On obtient $a^{\alpha} h^{'}(t) = (R - bt)^{\alpha-1} t^{\beta-1} (R\beta - bt)$.
La fonction h est croissante si $t < \frac{R\beta}{b}$ et décroissante dans le cas contraire.

EXERCICE n° 2

❶ Il faut $x > -1$ et $x \neq 0$. On peut prolonger f par continuité en zéro, en posant $f(0) = 0$. On obtient $f'(x) = \dfrac{x - (x+1)Ln(x+1)}{(x+1)x^2}$.
La dérivée est du signe du numérateur, on étudie donc ce numérateur.
On obtient alors que f est strictement décroissante de $]-1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

❷ L'équation $f(x) = x$ est équivalente à $Ln(x+1) = x^2$. On étudie la fonction g définie sur R^{+*} par $g(x) = x^2 - Ln(x+1)$. Cette fonction admet un minimum négatif en $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et elle est strictement croissante de $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$ sur $[\lambda, +\infty[$ avec $\lambda < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique point fixe sur cet intervalle.

EXERCICE n° 3

❶ Pour deux numéros, on a : $2x + 2 = 36$, soit $x = 17$
Pour trois numéros, on a : $3x + 3 = 36$, soit $x = 11$
Pour six numéros, on a : $6x + 6 = 36$, soit $x = 5$

❷ Pour tout couple (x, y), la probabilité est $\dfrac{1}{38} \cdot \dfrac{1}{38}$. Les deux événements sont indépendants, pour toutes valeurs de x et de y.

❸ Il n'existe pas de stratégies gagnantes, car les évènements sont indépendants.

PROBLEME

❶ La dérivée de f est nulle pour $x = \frac{1}{a}$. La fonction f est croissante sur $\left]0, \frac{1}{a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{a}, +\infty\right[$. On trouve $f(\frac{1}{a}) = -1 - Ln(a)$

Si $a > \frac{1}{e}$, l'équation n'admet pas de solution;
Si $a = \frac{1}{e}$, on a une seule solution.
Si $0 < a < \frac{1}{e}$, il y a deux solutions.

❷ La fonction admet une branche parabolique dans la direction $y = -ax$

❸ L'aire est égale à $I = \int_1^2 (\frac{1}{2}x - Ln(x))dx$, d'où $I = \left[\frac{x^2}{4} - (xLnx - x)\right]_1^2$
On obtient $I = \frac{7}{4} - 2Ln2$

❹ Il s'agit de montrer que f est convexe, on vérifie alors que sa dérivée seconde est positive

❺ Pour la suite géométrique (u_n), on a les résultats suivants:

Si $0 < a < 1$, la suite converge vers zéro.
Si $a = 1$, la suite est stationnaire.
Si $a > 1$, la suite est divergente.

Pour la suite (v_n), on a $v_{n+1} = -f(v_n)$ et comme f est négative, on vérifie par récurrence que la suite (v_n) est toujours positive.
D'autre part, si $(v_n) \to l$, alors l est solution de l'équation $l = -f(l)$. Soit $y = \frac{1}{2}l + Ln(l)$.
L'étude de cette fonction montre qu'il existe une solution unique l comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1.
On considère la suite extraite des termes de rang pair et la suite extraite des termes de rang impair. Les deux suites sont adjacentes et convergent vers cette valeur l .