

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE
APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE
STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $(\mathbb{R}^{+*} \cdot \mathbb{R}^{+*})$ par $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, où $\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et α, β appartiennent à $\mathbb{R}^{+*}$.



❶ Pour y fixé dans $\mathbb{R}^{+*}$, on pose $g(x) = f(x, y)$. Etudier les variations de g selon les valeurs de α et donner l'allure de son graphe.

❷ On suppose que pour tout couple (x, y) de $(\mathbb{R}^{+*} \cdot \mathbb{R}^{+*})$, on a : $ax + by \leq R$, où a, b, R sont des réels strictement positifs.

Déterminer $\underset{x}{\text{Max}} f(x, y)$ (Max désigne le maximum de f en x).

❸ Etudier les variations de la fonction h définie par :

$$h(t) = \left(\frac{R - bt}{a} \right)^\alpha t^\beta, \text{ où } \alpha, \beta, R, a, b > 0 \text{ et } \alpha + \beta = 1$$

EXERCICE n° 2

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \frac{\text{Ln}(x+1)}{x}$, où Ln désigne le logarithme népérien.

- ❶ Etudier les variations de f et donner l'allure de son graphe.
- ❷ Montrer que f admet un unique point fixe sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

EXERCICE n° 3



Au jeu de la roulette américaine, il y a 38 numéros ; de 1 à 36, plus le zéro et le double zéro. Chaque joueur a la possibilité de miser sur un numéro, deux numéros ensemble, trois, quatre, six, douze ou dix huit. Les 38 numéros sont équiprobables et rapportent le même gain pour la même mise. A chaque jeu, un seul numéro est gagnant.

Il revient au même de miser un jeton sur un seul numéro x et un autre jeton sur un autre numéro y que de miser deux jetons sur l'ensemble des deux numéros x et y . Il en est de même pour les autres combinaisons. Les stratégies de jeu sont donc équivalentes au niveau des gains.

Le gain pour un seul numéro joué est de 35 fois la mise et on récupère sa mise (par exemple, pour une mise de 100 sur un seul numéro gagnant, on obtient 3600, soit un gain net de 3500).

- ❶ Quel est le gain obtenu lorsque l'on mise sur 2 numéros, sur 3 numéros, sur 6 numéros ?
- ❷ Quelle est la probabilité que le numéro x sorte deux fois de suite ?
Quelle est la probabilité pour que le couple (x,y) soit gagnant sur deux jeux consécutifs.
- ❸ A votre avis existe-il une stratégie gagnante ? Expliquer.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + \ln(x)$$

où $\ln$ désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

❶ Déterminer, selon les valeurs de a , le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$.

❷ Donner l'allure du graphe de $f_{\frac{1}{2}}$ ($a = \frac{1}{2}$).

❸ Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{\frac{1}{2}}$, l'axe des abscisses, les droites $x=1$ et $x=2$.



❹ Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, et tout $x, t > 0$, on a :
 $f(\alpha x + (1-\alpha)t) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(t)$

❺ Etudier, selon les valeurs de a , la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

Etudier la suite (v_n) définie par : $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \ln(v_n)$.