CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2003

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1) Si u o u = u alors u o (u-e) = (u-e) o u = 0, alors (e-u) o (e-u) = (e-u) -u o (e-u) = e-u. la réciproque se vérifie de la même façon.

2) Comme u o (e-u) = 0, Im(e-u) est inclus dans Ker(u). Réciproquement, pour tout x appartenant à Ker(u), u(x)=0 donc x=u(x)+(e-u)(x)=(e-u)(x), ce qui implique que x appartient à Im(e-u). D'où, finalement, Im(e-u)=Ker(u).
En remplaçant u par e-u, on obtient l'autre égalité demandée.

3) Pour tout x appartenant à l'intersection entre Ker(u) et Im(u), on a, en utilisant la question précédente, u(x)=(e-u)(x)=0 donc x=0. De plus, on a, pour tout x appartenant à E, x=u(x)+(e-u)(x). Autrement dit, tout vecteur s'écrit comme la somme d'un élément de Im(u) et d'un élément de Im(e-u). Comme Im(e-u) est égal à Ker(u), tout vecteur de E s'écrit comme combinaison d'un vecteur de Im(u) et de Ker(u). Ces deux sous-espaces sont donc supplémentaires.

Exercice n° 2

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout n supérieur ou égal à 3, J^n est la matrice nulle

2) $M = aI + 3J$. En utilisant la formule du binôme, on obtient, pour tout n supérieur ou égal à 2 :

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 3na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{9}{2}n(n-1)a^{n-2} & 3na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

Exercice n° 3

1) $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{4}{3}$; $u_4 = \frac{13}{10}$

2) $u_{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4u_n}$

3) Suite croissante majorée par 3/2, donc convergente. La limite est $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$

4) Suite décroissante minorée par 0, donc convergente. La limite est $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$

5) Les suites extraites ayant même limite, la suite converge vers la même limite.

Exercice n° 4

En utilisant l'intégration par parties et la décomposition en éléments simples, on obtient la primitive suivante : $I = x\ln(x^2-1) - 2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \text{constante}$

L'intégrale tend vers l'infini quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Pour $a \in \left]1,2\right[$, on calcule $\int_a^2 \ln(x^2-1)dx = 3\ln 3 + 2a - 4 - (a+1)\ln(a+1) - (a-1)\ln(a-1)$

Quand $a \to 1^+$, $(a-1)\ln(a-1) \to 0$, donc l'intégrale est convergente vers $3\ln 3 - 2\ln 2 - 2$

Exercice n° 5

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; Soit Y' la matrice colonne ayant comme composantes x', y' et z', on a alors Y'=AY

2) Les valeurs propres de la matrice A sont –1, -4 et 5. A est diagonalisable puisqu'elle a 3 valeurs propres distinctes. A est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.

3) Les trois vecteurs propres de A, indépendants, sont : (1,0,0) (1,3,0) (1,-6,54)

4) $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 54 & -18 & -3 \\ 0 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) D'après la question 1, on a Y'=AY. Soit Z la matrice colonne ayant comme composantes z_1, z_2 et z_3 et Z' la matrice colonne ayant comme composantes z'_1, z'_2, z'_3 (fonctions dérivées des fonctions z_1, z_2, z_3 par rapport à la variable t),

on a alors Z'=DZ d'où le résultat : $\begin{cases} z_1 = \alpha e^{-t} \\ z_2 = \beta e^{-4t} \\ z_3 = \gamma e^{5t} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \alpha e^{-t} + \beta e^{-4t} + \gamma e^{5t} \\ y = 3\beta e^{-4t} - 6\gamma e^{5t} \\ z = 54\gamma e^{5t} \end{cases}$