

**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1



Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension finie. On désigne par e l'endomorphisme identité et on considère un endomorphisme u tel que $u^2 = u$ ou $u = u$. Un tel endomorphisme est appelé projecteur. On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E .

- 1) Vérifier que u est un projecteur si et seulement si $e-u$ est un projecteur.
- 2) Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(e-u)$ et que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(e-u)$ où $\text{Im}(u)$ désigne l'image de u et $\text{Ker}(u)$ désigne le noyau de u .
- 3) Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont deux sous espaces supplémentaires.

Exercice n° 2

1) Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2, J^3, \dots, J^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

2) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Mettre la matrice M sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices I et J , I étant la matrice identité d'ordre 3.

Utiliser ce résultat pour calculer $M^2, M^3, \dots, M^n$ (n appartenant à $\mathbb{N}^*$).



Exercice n° 3

Soit (u_n) , n appartenant à $\mathbb{N}$, la suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n - 2} \text{ avec } u_0 = 1$$

- 1) Calculer les 4 premiers termes de la suite. Que constatez-vous ?
- 2) Etablir une relation entre u_{n+2} et u_n .
- 3) En déduire l'équation de récurrence qui lie deux termes successifs d'indice pair. Montrer que les termes d'indice pair forment une suite convergente, dont vous déterminerez la limite.
- 4) Ecrire, de façon analogue, l'équation de récurrence qui lie deux termes successifs d'indice impair. En déduire que les termes d'indice impair forment une suite convergente, dont vous préciserez la limite.
- 5) Déduire de ce qui précède, le comportement de la suite (u_n) .

Exercice n° 4

Calculer l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_1^2 \ln(x^2 - 1) dx$$



Exercice n° 5

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$x' = x - y; \quad y' = 4y - z; \quad z' = 5z \quad \text{où } x, y, z \text{ sont des fonctions de la variable réelle } t.$$

- 1) Ecrire ce système différentiel sous forme matricielle où A est une matrice d'ordre 3 et Y la matrice colonne ayant comme composantes x, y et z .
- 2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A . Est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
- 3) Déterminer trois vecteurs propres de A , indépendants, de première composante égale à 1.
- 4) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base formée des vecteurs propres. Ecrire la relation de similitude entre A et une matrice diagonale D que vous déterminerez.
- 5) Effectuer le changement $Z = P^{-1}Y$, les composantes de Z étant des fonctions de la variable réelle t . Déterminer les solutions du nouveau système différentiel.
- 6) Donner les solutions du système initial.