

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Exercice 1

Un enfant joue avec 20 billes, 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément 3 billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance mathématique de X .



2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes (probabilité identique de tirer l'une ou l'autre des deux boîtes), puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

$A1$: « l'enfant choisit la boîte cubique »

$A2$: « l'enfant choisit la boîte cylindrique »

R : « l'enfant prend une bille rouge »

V : « l'enfant prend une bille verte »

- a. Calculer la probabilité de l'évènement R .
 - b. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu (tirage d'une bille), en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
- a. Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
 - b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

Exercice 2



Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc pour tout entier naturel n : $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
- b. Préciser la valeur de α_1 .
- c. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. a. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
- b. Etudier la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \ln x - x + 1$.
- c. En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ .
4. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Soit la suite (u_n) , définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$: montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n .

Par R_n l'évènement « on obtient rouge au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

Par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n .

Par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n .

a. Déterminer a_1 .



b. Déterminer r_1 .

c. En remarquant que, pour tout $n \geq 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$, montrer que

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$$

d. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.

e. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n .

f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n , puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.



Exercice 4

Etudier la série de terme général $u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$, avec a un nombre réel compris entre 0 et 1 inclus (indication : démontrer que l'on peut se ramener à l'étude d'une série à termes positifs et effectuer un développement limité de u_n à l'ordre 2)

Exercice 5

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E vérifiant $p^2 = p \circ p = p$. Démontrer que p est diagonalisable.

2. Soit u , v et f trois endomorphismes de E tels qu'il existe (λ, μ) appartenant à $\mathbb{R}^2$ (où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels) avec :

$$f = \lambda u + \mu v, f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$$

a. Démontrer que $f^3 - (\lambda + \mu)f^2 + \lambda\mu f = 0$

b. f est-elle diagonalisable ?