ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Remarque ***: Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre choisi par le candidat.***
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice 1

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

a) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

b) $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^+$

c) $u_n = (\frac{(n-x)}{(n+x)})^n$.

Exercice 2

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$définis par :

F =$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$

G =$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$.

a) Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.

b) Donner une base de $F \cap G$ et donner sa dimension.

c) Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée précédemment et des vecteurs de la base G trouvée précédemment est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

d) Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = {}^1\!/_x$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

$g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$.

a) Démontrer que g est une fonction positive.

b) Démontrer que f est une fonction de classe C^1. Que vaut $f'(0)$?

c) Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$. En déduire que $|f'(x)| \leqslant 1/2$

d) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Prouver que, pour tout n entier naturel, on a : $|u_n - \ln 2| \leq \ln 2 (1/2)^n$

Exercice 5

a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements suivants :

A = « tirage d'un nombre pair »
B = « tirage d'un multiple de 3 »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

b) Reprendre la question précédente avec une urne de 13 boules.

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

a) On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant et on obtient :

$u_n = \frac{2}{5}\frac{1+\frac{(-1)^n}{(2n)}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{(5n)}}$. Le second terme tend vers 1, donc la suite converge vers 2/5.

b) Si a=b, les termes de la suite sont nuls et la suite converge vers 0.

Si a<b, on écrit $u_n = \frac{-1+(\frac{a}{b})^n}{1+(\frac{a}{b})^n}$. Comme $(\frac{a}{b})^n$ tend vers 0, la suite converge vers -1.

Si a>b, on écrit $u_n = \frac{1-(\frac{b}{a})^n}{1+(\frac{b}{a})^n}$. Comme $(\frac{b}{a})^n$ tend vers 0, la suite converge vers 1.

c) La suite peut aussi s'écrire comme $u_n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{2x}{(n+x)})}$. Or, comme $\frac{-2x}{(n+x)}$ tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de ln (1 + a) au voisinage de zéro (qui est a). Ce qui donne que la suite converge vers e^{-2x}.

Exercice 2

a) Les vecteurs (2,1,0) et (-1,0,1) engendrent F et sont linéairement indépendants. C'est donc une base de F et dim F = 2.

Les vecteurs (1,2,0) et (0,2,1) engendrent G et sont linéairement indépendants. C'est donc une base de G et dim G = 2.

b) Le vecteur (-1,0,1) engendre $F \cap G$. Une famille constituée d'un vecteur non nul est libre, donc c'est une base de $F \cap G$. Dim $F \cap G$= 1.

c) L'espace vectoriel engendré par la réunion des deux bases est F + G. On doit démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit de démontrer que dim (F + G) = 3. On sait que :

dim (F + G) = dim F + dim G – dim ($F \cap G$). On en conclut bien que dim (F + G) = 3.

d) F et G ne sont pas supplémentaires car $F \cap G$ n'est pas l'ensemble vide.

Exercice 3

Écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse a. Il s'agit de :

$y - a^2 = 2a(x-a)$, soit $y = 2ax - a^2$

De même, l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = {}^1/_x$ au point d'abscisse b s'écrit :

$y - \frac{1}{b} = \frac{-1}{b^2}(x - b)$, soit $y = \frac{-1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

Pour que les deux tangentes coïncident, il faut que a et b vérifient $2a = \frac{-1}{b^2}$ et $-a^2 = \frac{2}{b}$

On en déduit que a = 0 ou a = -2. La solution a = 0 est à exclure car on ne peut déterminer b dans ce cas. Pour a = -2, on obtient b = -1/2. On vérifie facilement que les tangentes en a et en b coïncident.

Exercice 4

a)$g'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$; $g''(x) = x\mathrm{e}^x$

Comme la fonction g'' est positive sur le domaine de définition et que $g'(0) = 0$, g' est croissante et positive sur le domaine de définition. Donc g est croissante et comme $g(0) = 0$, g est positive sur le domaine de définition.

b) La fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle]0, +∞[avec $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$

Au point 0, on va vérifier que la fonction f est continue. C'est évident en utilisant le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de zéro :

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Le développement de la dérivée de f en zéro est -1/2. On en déduit que f est de classe C^1 sur le domaine de définition et que $f'(0) = -1/2$.

c) Le calcul n'est pas détaillé ici. En utilisant la question a) et les propriétés de la fonction exponentielle, on en déduit que la fonction f'' est positive sur le domaine de définition. En conséquence, la fonction f' est croissante. On sait que $f'(0) = -1/2$. La limite de f' en l'infini se comporte comme $-x/\mathrm{e}^x$, donc elle est nulle. On en déduit que $f'(x)$ est compris entre -1/2 et 0 sur le domaine de définition. Ce qui est le résultat recherché.

d) Par l'inégalité des accroissements finis et en utilisant le résultat de la question précédente, on sait que $|f(x) - f(y)| \leqslant 1/2\,|x - y|$ pour tout x et y réels positifs. En appliquant cette inégalité pour les termes de la suite u_n et en utilisant le fait que f(ln2) = ln2, on obtient le résultat demandé par récurrence.

Exercice 5

a) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}, A ∩ B = {6, 12}

p(A) = 1/2 ; p(B) = 1/3 ; p(A ∩ B) = 1/6 = p(A)p(B).

A et B sont donc indépendants.

b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}, A ∩ B = {6, 12}

p(A) = 6/13 ; p(B) = 4/13 ; p(A ∩ B) = 2/13 ≠ p(A)p(B).

A et B ne sont pas indépendants.