

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN



AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

PROBLEME N° 1

❶ Soit la suite $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^5}$. Montrer que cette suite est majorée et convergente.

Quelle est sa limite ?

On cherche à calculer une approximation de $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$ avec 5 décimales exactes.

On pose $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$.

❷ Vérifier que $\int_i^{i+1} \frac{1}{x^5} dx \leq \frac{1}{i^5} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{x^5} dx$.

❸ ① Dédire de la deuxième question un majorant de R_n .

② Combien de décimales faut-il garder pour chaque terme dans le calcul de S_n ?

③ Si on veut approcher la valeur de S par S_n quelle est la précision ?

④ En déduire la valeur de n qu'il faut choisir pour calculer S avec 5 décimales exactes (on ne demande pas de calculer S dans cette question).

④ ① Dédurre de la deuxième question un encadrement de R_n , soit $m_n \leq R_n \leq M_n$.

② On choisit comme valeur approchée de R_n le milieu du segment $[m_n, M_n]$.

Quelle valeur approchée de S en déduit-on ?

③ Quelle est la précision de l'encadrement sans tenir compte des arrondis sur les termes de S_n , puis en en tenant compte ?

④ Quelle valeur de n doit-on choisir pour que cette approximation ait 5 décimales exactes ?

⑤ Calculer le valeur approchée ainsi obtenue en présentant les résultats sous forme d'un tableau, et en calculant les termes de S_n avec le nombre de décimales adéquat.

Rang	Terme de S_n	minimum	maximum	valeur approchée	précision
I	$\frac{1}{i^5}$				
1					
2					
...					
N					
	S_n	m_n	M_n	S	ε_n

PROBLEME N° 2

On cherche à résoudre l'équation $P(x) = 0$, où $P(x) = x^3 + 3x - 2$.

❶ Montrer que $P(x) = 0$ admet une solution unique s , qui appartient à $[0;1]$.

Par la suite on cherche à calculer une valeur approchée de s avec 6 décimales exactes.

❷ On pose $\varphi_\lambda(x) = x + \lambda \cdot P(x)$, avec $\lambda \neq 0$.

Montrer que $\varphi_\lambda(x) = x \Leftrightarrow P(x) = 0$.

❸ On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = \varphi_\lambda(u_n)$ et $u_0 \in]0;1[$.

① Pour $\lambda = -1/4$, calculer $\varphi_\lambda(x)$ et représenter graphiquement cette fonction sur $[-1;2]$.

② Montrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

③ On choisit $u_0 = 0,6$. Représenter sur le graphique précédent les 4 premiers termes sans calcul.

④ Déterminer les premiers termes de la suite (u_n) jusqu'au rang n_0 tel que u_{n_0} soit une approximation de s avec 6 décimales exactes.

⑤ Montrer que si $\lambda \in [-1/3;0[$, la suite (u_n) est convergente.

❹ Représenter graphiquement la fonction $P(x)$ sur $[-1;2]$.

❺ On définit la suite (v_n) par $v_{n+1} = v_n - \frac{1-v_n}{P(1)-P(v_n)} P(v_n)$ et $v_0 = 0,6$.

① Sur le graphique précédent, donner une représentation géométrique décrivant la façon de passer de v_n à v_{n+1} .

② Calculer les premiers termes de la suite (v_n) jusqu'à ce que la valeur calculée ait 6 décimales exactes (présenter les calculs sous forme de tableau).

③ Que constate-t-on ? Comment s'explique ce résultat ?

❶ On définit la suite (w_n) par $w_{n+1} = w_n - \frac{P(w_n)}{P'(w_n)}$ et $w_0 = 0,6$.

① Sur le graphique précédent, donner une représentation géométrique décrivant la façon de passer de w_n à w_{n+1} .

② Calculer les premiers termes de la suite (w_n) jusqu'à ce que la valeur calculée ait 6 décimales exactes (présenter les calculs sous forme de tableau).

③ Que constate-t-on ? Comment s'explique ce résultat ?

❷ Comparer la vitesse de convergence des différentes suites utilisées.