CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
AVRIL 1999

CORRIGE DE L'EPREUVE DU CALCUL NUMERIQUE

OPTION MATHEMATIQUES

VOIE B

*
* *

EXERCICE N° 1

❶ $\mathrm{EX} = \sum_{k=0}^{10} k.\frac{1}{11} = 5 \quad \mathrm{VX} = \sum_{k=0}^{10} k^2 \frac{1}{11} - (\mathrm{EX})^2 = 10$

❷ $\mathrm{EZ}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{EX}_i = 5 \quad \mathrm{VZ}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{VX}_i = \frac{10}{n}$ car les variables sont indépendantes.

Cette variable représente le nombre moyen de pièces défectueuses par jour sur *n* jours.

❸ $\mathrm{P}_n < \frac{\mathrm{VZ}_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donc $\mathrm{P}_n < \frac{40}{n}$.

❹ D'après l'inégalité ci-dessus on a $n_0 = 3999$. P_n est la probabilité pour que la moyenne empirique Z_n diverge de plus de 0,5 de sa moyenne théorique EZ_n. Il suffit donc d'effectuer cette moyenne sur 4000 jours ou plus pour qu'il y ait moins de 1% de chances que cette différence soit plus grande que 0,5.

❺ W peut prendre toutes les valeurs entières dans {0, 1, ... 20}. Sa loi de probabilité est donnée par :

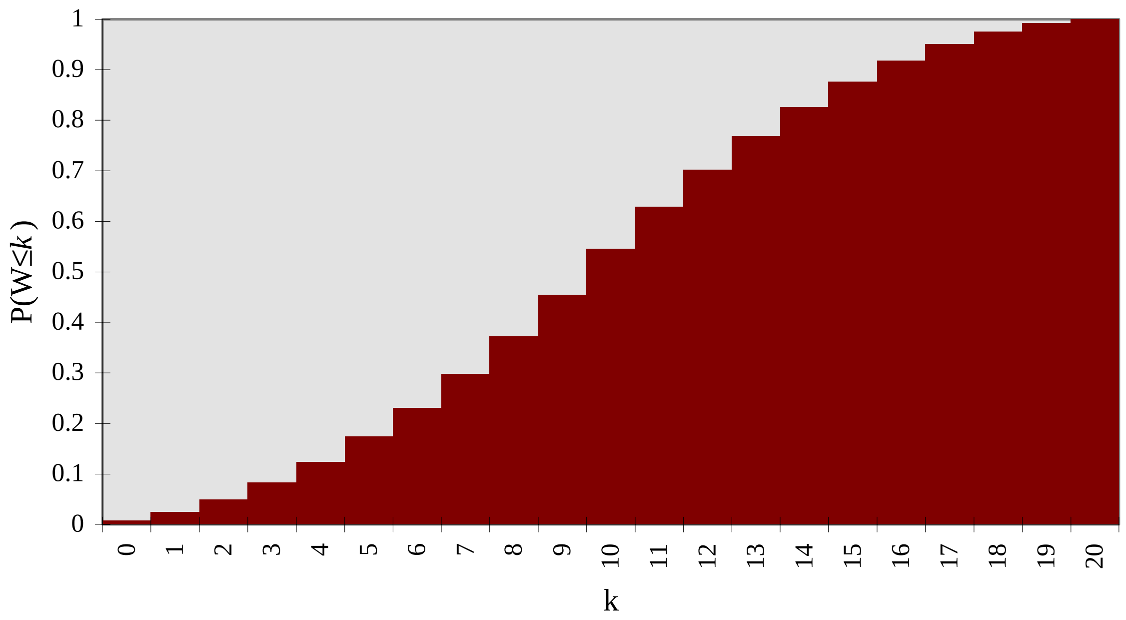
$$\mathrm{P}(W = k) = \sum_{\substack{i \in \{0, 1, ..., 20\} \\ tq\ k-i \in \{0, 1, ..., 20\}}} \mathrm{P}(X_1 = i)\mathrm{P}(X_2 = k - i)$$

donc :

k	P(W=k)	K	P(W=k)	K	P(W=k)
0	1/121	7	8/121	14	7/121
1	2/121	8	9/121	15	6/121
2	3/121	9	10/121	16	5/121
3	4/121	10	11/121	17	4/121
4	5/121	11	10/121	18	3/121
5	6/121	12	9/121	19	2/121
6	7/121	13	8/121	20	1/121

$$\mathrm{EW} = \sum_{k=0}^{k=20} k.\mathrm{P}(\mathrm{W}=k) = 10 = \mathrm{EX}_1 + \mathrm{EX}_2$$

Fonction de répartition de W

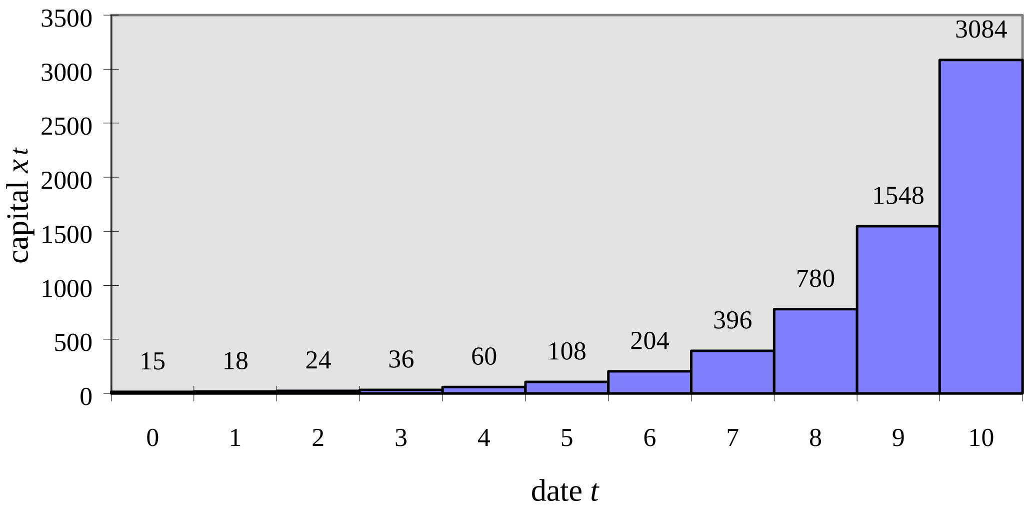


EXERCICE N° 2

❶ Tableau représentant le capital du marchand :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{t-1}	15	18	24	36	60	108	204	396	780	1548
$2.x_{t-1}$	30	36	48	72	120	216	408	792	1560	3096
$x_t=2.x_{t-1}-12$	18	24	36	60	108	204	396	780	1548	3084

Capital à chaque étape



❷ On a $x_3 = 12 + 2^3(x_0 - 12) = 0$ donc $x_0 = 10{,}5$.

❸ ① Avec les notations :

$$x_t = q.x_{t-1} - c$$

② On reconnaît une série géométrique de raison q>1. On a donc :

$$x_t = q^t\left(x_0 - \frac{c}{q-1}\right) + \frac{c}{q-1}$$

③ Si $x_0 < \frac{c}{q-1}$ alors x_t est une fonction décroissante de t.

Si $x_0 > \frac{c}{q-1}$ alors x_t est une fonction croissante de t.

④ Dans le cas où $x_0 < \frac{c}{q-1}$, la relation du b) donne : $q^t = \frac{-\frac{c}{q-1}}{x_0 - \frac{c}{q-1}}$ donc $t\log(q) = \log\left(\frac{1}{1-\frac{q-1}{c}x_0}\right)$ d'où : $\boxed{t = -\frac{\log\left(1-\frac{q-1}{c}x_0\right)}{\log(q)}}$

⑤ Avec c=12 et q=2 cela donne $t = -\frac{\log\left(1-\frac{x_0}{12}\right)}{\log 2}$; comme t est un nombre d'étapes, il reste encore à prendre la partie entière de cette valeur.

t est donc une fonction croissante de x_0 quand $0 < x_0 < 12$ et la droite $x_0 = 12$ est une asymptote. Un capital de départ de 12 F entraîne un cycle infini où le capital vaut 12 F tout le temps.