

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES



EXERCICE n° 1

Chaque jour, une machine outil produit de 0 à 10 pièces défectueuses. On suppose que les probabilités d'avoir 0, 1, ... ou 10 pièces défectueuses sont égales de sorte que si le nombre de pièces défectueuses est X , cette variable aléatoire suit la loi de probabilité suivante :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 10\} \quad \text{Prob}(X = k) = \frac{1}{11}$$

❶ Calculer l'espérance mathématique EX et la variance VX de cette variable aléatoire.

❷ $X_1, \dots, X_n$ représentent le nombre de pièces défectueuses n jours consécutifs. On suppose que les X_i sont indépendantes. On note Z_n la variable aléatoire définie par :

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Calculer l'espérance mathématique EZ_n et la variance VZ_n de cette variable aléatoire. Que représente cette quantité ?

③ Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer la probabilité suivante :

$$P_n = \text{Prob}\left(|Z_n - EZ_n| > \frac{1}{2}\right)$$

④ Déterminer n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on ait certainement $P_n < 0,01$. Que représente cette quantité ?

⑤ Soit W la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses produites en deux jours. Quel est l'ensemble des valeurs que W est susceptible de prendre ? Quelle est sa loi de probabilité ? Calculer son espérance EW et tracer sa fonction de répartition.

EXERCICE n° 2

Un marchand va de ville en ville, achetant des marchandises, les revendant à l'étape suivante. Cette revente se fait avec bénéfice, on suppose dans un premier temps que le prix de vente est le double du prix d'achat. A chaque étape, il doit déboursier 12 F de frais.

① Fabriquer un exemple numérique montrant le déroulement du processus, en commençant de la manière suivante :

1. avoir initial pour l'achat	15 F	(Opération 1)
2. doublement lors de la vente	30 F	
3. après règlement des frais	18 F	(Opération 2)
4. étape suivante	36 F	

Poursuivre le calcul et faire un graphique sur les dix premières opérations.

② Le marchand part de la ville A et va à la ville B où il réussit à doubler son capital ; il paie ensuite ses frais (12 F). Puis il va à la ville C où il réussit à doubler son capital ; il paie de nouveau les frais et revient à la ville A où il recommence l'opération (vente, paiement des frais). Il constate alors que sa bourse est vide. Quel était son capital initial ?

③ Généralisation

On note x_0 l'avoir initial et x_t le capital à l'étape t , on suppose que chaque vente multiplie le capital par q , les frais sont constants égaux à c . ($q > 1$, $c > 0$)

- ① Calculer x_t en fonction de x_{t-1} .
- ② Calculer x_t en fonction de x_0 , q , c et t .
- ③ Montrer que x_t augmente ou diminue avec le temps selon la valeur de x_0 .
- ④ Dans le cas où x_t diminue, calculer la date t où x_t s'annule.
- ⑤ Prendre, comme dans l'exemple, $c=12$ et $q=2$ et représenter en fonction de x_0 le nombre maximum d'étapes que peut parcourir le marchand sans s'endetter.