CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

PROBLEME

A)

1) Etude de f

f (x) est définie continue sur $]0,+\infty[$.
Son domaine de définition est donc $D = R^{+*}$

- Dérivée de f (x)

$$f'(x) = (|x \ln x|)'$$

- Si $x > 1$, $|x \ln x| = x \ln x$

$$f'(x) = \ln x + 1 \;;\; f'(x) > 0$$

- Si $0 < x < 1$; $|x \ln x| = -x \ln x$

$$f'(x) = -\ln x - 1 \;;\; f'(x) < 0 \text{ si } x > \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < \frac{1}{e}$$

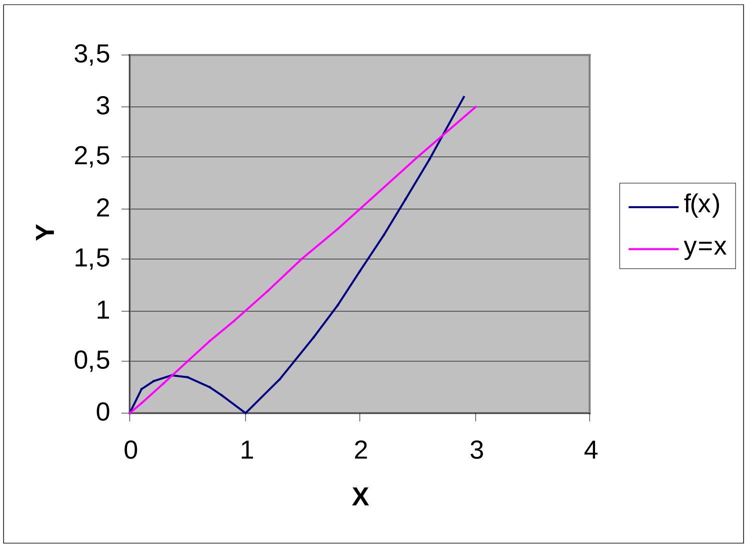
<u>Tableau de variation :</u>

x	0		1/e		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+		+	
$f(x)$	0	croissante	1/e	décroissante	0	croissante	e	croissante	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} |x \ln x| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x \ln x| = 0$$

<u>Courbe représentative :</u>



- <u>Coordonnées des points (C) $\cap$ (D) :</u>

$|x \ln x| = x$

pour $x > 1$, $\quad x \ln x = x$

$\Leftrightarrow \ln x = 1$ d'ou $x = e$

$\Rightarrow$ Premier point d'intersection : A(e,e)

Pour $0 < x < 1$, $\quad -x \ln x = x$

$\Leftrightarrow \ln x = -1$ d'ou $x = \dfrac{1}{e}$

$\Rightarrow$ Deuxième point d'intersection B(1/e,1/e).

Puisque $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ troisième point d'intersection C(0,0).

2° - Montrons que α unique sur $]1,e[$ tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

Soit $\mathrm{I} =]1, \mathrm{e}[$
f (x) est continue et strictement croissante sur $]1,e[$,
par conséquent il existe un α unique sur $]1,e[$ tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.

f (1) = 0
f (e) = e ln e = e

$\Rightarrow \forall u \in]0,e[, \exists! a \in \mathrm{I}$ tel que $f(\mathrm{a}) = \mathrm{u}$ (Théorème des valeurs intermédiaires)

Ici, on prend $u = 1/e$
$\Rightarrow \exists! \alpha \in]1,e[$ tel que $f(\alpha) = 1/\mathrm{e}$

Déterminons une valeur approchée α, à 10^{-1} près par encadrements successifs :
On a :
f (2) =1,38 $\rangle$ 0,367
f (1,1)=0,104 $\langle$ 0,367
f (1,5)=0.608 $\rangle$ 0,367
f (1,3)=0,3410 $\langle$ 0.367
f (1,4)=0,47 $\rangle$ 0.367

On a donc $\alpha \approx 1{,}3$

B)

1° Les valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est constante
Pour que (u_n) soit constante, il faut que $u_1 = f(u_0) = u_0$

On obtient :

$$u_0 = \frac{1}{e} \quad , u_0 = \mathrm{e} \; , \; u_0 = 0$$

2°

$u_0 \in \left]0,1/e\right[$

$u_{n+1} = f(u_n) = \left|u_n \ln u_n\right|$, ici $f(u_n) = -u_n \ln u_n$

$u_1 = f(u_0) < 1/e$

$u_0 \in \left]0,1/e\right[$ et $u_1 \in \left]0,1/e\right[$ donc cette relation est vraie pour u_0 et u_1,

Montrons que si elle est vraie pour u_n elle est vraie pour u_{n+1}.

Supposons $0 < u_n < \frac{1}{e}$

sur $\left]0,1/e\right[$, f est strictement croissante donc

$f(0) < f(u_n) < f(1/e$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \left|1/e \ln 1/e\right|$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1/e$

donc si $u_n \in \left]0,1/e\right[$, $u_{n+1} \in \left]0,1/e\right[$ donc $u_n \in \left]0,1/e\right[$.

Donc on vient de montrer que si la relation $0 < u_n < 1/e$ était vraie pour u_n elle était vraie pour u_{n+1} donc elle est vraie pour tout n$\in N$.

$u_{n+1} - u_n = \left|u_n \ln u_n\right| - u_n$

or, $0 < u_n < \frac{1}{e}$

$u_{n+1} - u_n = -u_n \ln u_n - u_n = -u_n(\ln u_n + 1)$

$-u_n < 0$ *et* $\ln u_n + 1 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Sur $\left]0,1/e\right[$, (u_n) est croissante et l'on vient de montrer qu'elle est bornée (majorée et minorée) donc elle est convergente et a pour limite :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{e}$$

3°

$u_0 \in \left]1/e, 1\right[$

- Encadrement de u_1

$$\frac{1}{e} < u_0 < 1$$
$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{e} < \ln u_0 < \ln 1$$
$$\Leftrightarrow -u_0 \ln\frac{1}{e} > -u_0 \ln u_0 > -u_0 \ln 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < u_1 < u_0$$

$u_0 \in \left]1/e, 1\right[$, donc, $u_1 = f(u_0) \in f(\left]1/e, 1\right[)$
Sur $\left]1/e, 1\right[$, f décroit donc $f\left]1/e, 1\right[\in \left]0, 1/e\right[$ donc $u_1 \in \left]0, 1/e\right[$

On se retrouve dès le rang 1 dans le cas précédent, on aura alors u_n tend vers $1/e$.

4) $u_0 = 1$
$\Rightarrow f(u_0) = f(1) = 0$
La suite est « constante » si on pose par prolongement $f(0) = 0$.

5)
$u_0 \in \left]1, \alpha\right[\qquad F(\alpha) = 1/e$

f croit ainsi que u_n
$u_1 \in f(1, \alpha) = [0, 1/e]$

On se ramène au cas n°1 et u_n a pour limite $1/e$.

6)

$u_1 \in f(]\alpha, e[) =]1/e, e[$

Si $u_1 \in]1/e, 1[$ alors u_n tend vers 1/e

Si $u_1 \in]1, e[,\ u_1 < e$

Si $\forall n,\ u_n < e,\quad u_{n+1} = f(u_n) < e$ oui car

- si $u_n \in]0, \alpha[,\ f(u_n) < 1/e < e$
- si $u_n \in]\alpha, e[$, on revient au cas

$u_0 \in]\alpha, e[$ et $u_1 < e$

donc $0 < u_n < e$

Montrons que $u_1 < u_0$

Montrons donc que $f(u_0) < u_0$ sur $]\alpha, e[$

$f(u_0) = u_0 \ln u_0$

$u_0 \in]\alpha, e[\Rightarrow \dfrac{f(u_0)}{u_0} = \ln u_0 < \ln e < 1$ donc $f(u_0) < u_0$ donc $u_1 < u_0$.

$u_0 \in]\alpha, e[\Rightarrow u_1 \in]1/e, e]$

Si $u_1 \in]1/e, 1]$, alors u_n tend vers 1/e, celà nous ramène au cas 1.
Si $u_1 \in]1, \alpha]$, alors u_n tend vers 1/e, celà nous ramène au cas 1.
Si $u_1 \in]\alpha, e]$, alors $u_2 < u_1$.........

Par récurrence, si $\exists$ n tel que $u_n \in]1/e, \alpha],\quad u_n$ tend vers l

si $\forall n, u_n \in]\alpha, e[$, la suite est bornée décroissante donc elle converge.
La seule limite possible est $l = 1/e$
(La suite sort de $]\alpha, e[$ à partir d'un certain rang.

7) $u_0 > e$

Montrons que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$

$\Leftrightarrow f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 2(u_n - u_{n-1})$

$\Leftrightarrow f(u_n) - 2u_n \geq f(u_{n-1}) - 2u_{n-1}$

Or $u_n > u_{n-1}$ car la suite est croissante.

Montrons que $f(u) - 2u$ croit sur $]e, +\infty[$

$f(u) - 2u = u\ln u - 2u = u(\ln u - 2) = \ln u - 2 + 1 = \ln u - 1$

$f'(u) > 0$ si $\ln u > 1$ donc si $u > e$

Donc, $\forall u > e$, $f(u) - 2u$ est croissante

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$ (cqfd)

Notons $v_n = u_n - u_{n-1}$ $v_n > 0$, $\forall n$

On a montré que $v_{n+1} > 2v_n$

$\Rightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 2$, c'est une suite de termes positifs, croissante, non bornée donc divergente.

EXERCICE

1)

- Si A et B sont inversibles alors, il existe A^{-1}et B^{-1} tels que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
et $BB^{-1}= B^{-1}B = I$.

$\Rightarrow$ $AB*B^{-1}*A^{-1}= A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}= AA^{-1}=I$, donc AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

- Si AB inversible alors il existe $(AB)^{-1}$ tel que : $AB*(AB)^{-1}=(AB)^{-1}*AB=I$

$\Rightarrow$ $AB*B^{-1}*A^{-1}= AA^{-1}=I$, avec $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Donc A est inversible si (AB) est inversible avec $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. .

La démonstration est identique pour B.

2) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

A est inversible si A^p est inversible
1) Supposons A inversible, donc $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

Soit $A^p= A*A*....*A$ (p fois)
$A^p*(A^p)^{-1}= \underbrace{(A*A*.....*A)}_{\text{(p fois)}}*\underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*.....*A^{-1})}_{\text{(p fois)}}$
Par associativité des matrices, on obtient :
$A^p*(A^p)^{-1}= (A*A*.....*(A*A^{-1})*A^{-1}*.....*A^{-1})$
$= A^{p-1}(AA^{-1})(A^{p-1})^{-1}=A^{p-1}I(A^{p-1})^{-1}$
et de proche en proche $AA^{-1}=I$

donc $A^p*(A^p)^{-1}=I$, donc A^p est inversible.
Comme l'inverse d'une matrice est unique, on a, $A^p*(A^p)^{-1}=A^p*(A^{-1})^p=I$
Donc $(A^p)^{-1}=(A^{-1})^p$

2) Supposons A^p inversible, alors $A^p*(A^p)^{-1}=(A^p)^{-1}*A^p=I$
Montrons que si A^p inversible, A^{p+1} inversible

Developpons $A^p*(A^p)^{-1}$

$$A^{p+1}*(A^{p+1})^{-1}=AA^p*(A^p)^{-1}A^{-1}= AA^p*(A^{-1})^pA^{-1}= A\underbrace{(A*A*.....*A)}_{\text{(p fois)}}*\underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*.....*A^{-1})}_{\text{(p fois)}}A^{-1}=I$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A*A*A*.....*A)}_{\text{(p+1 fois)}}*\underbrace{(A^{-1}*A^{-1}*.....*A^{-1}*A^{-1})}_{\text{(p+1 fois)}} = A^{p+1}*(A^{p+1})^{-1}= I$$

Si A^p est inversible, alors A^{p+1} est inversible donc c'est vrai pour tout p, c'est vrai pour p=1 donc A est inversible.

Donc A^p est inversible, ainsi que A.
Et pour que A soit inversible, il faut que A^p , $p \in N^*$ soit inversible.

3)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons :

$$A^{n} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et démontrons que A^{n+1} vraie

$$A^{n+1} = A^{n} * A = \begin{pmatrix} \cos n\theta \cos\theta - \sin\theta \sin n\theta & .\cos n\theta \sin\theta + \sin n\theta \cos\theta & 0 \\ -\sin n\theta \cos\theta - \sin\theta \cos n\theta & .-\sin n\theta \sin\theta + \cos n\theta \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or cos(a+b) = cos a cos b - sin a sin b
donc $\cos(n\theta + \theta) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin\theta \sin n\theta$
de même,
sin(a+b)=sin a cos b + sin b cos a donc,
$\sin(n\theta + \theta) = \sin(n+1)\theta = \sin\theta \cos n\theta - \sin n\theta \cos\theta$

donc

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta & 0 \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc A^{n} est vrai.

4)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

$$A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta c & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

5) Si $(A^n)^{-1}$ existe, alors $(A^n)\ (A^n)^{-1}=I$

$(A^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Admettons $(A^n)^{-1}$

$(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et démontrons $(A^{n+1})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A^{n+1})^{-1} = (A^n * A^1)^{-1} = A^{-1} * (A^n)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta & -\cos\theta\sin n\theta-\sin\theta\cos n\theta & 0 \\ \sin\theta\cos n\theta+\sin n\theta\cos\theta & -\sin\theta\sin n\theta+\cos n\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta & 0 \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ donc $(A^n)^{-1}$ est vraie.

Si $(A^n)^{-1}$ existe alors $(A^n)*((A^n)^{-1}=I$

Vérification :

$$(A^n)*(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta & 0 \\ -\sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta & 0 \\ \sin n\theta & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta & -\cos n\theta\sin n\theta+\sin n\theta\cos n\theta & 0 \\ -\sin n\theta\cos n\theta+\sin n\theta\cos n\theta & \cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

donc $(A^n)^{-1}$ existe.