ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

Problème

On considère la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\mathrm{x}) = |\mathrm{x}\ln \mathrm{x}| \qquad (x \rangle 0) \end{cases}$$

A)

❶ Etudier f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère $(o, \mathrm{i}, \mathrm{j})$ orthonormé (unités : 3 cm sur chaque axe)

Construire dans ce repère la droite (D) d'équation : y = x

Trouver les coordonnées des points de : (C) $\cap$ (D).

❷ Montrer qu'il existe un réel α unique de $]1, e[$ tel que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{e}$.

Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α.

Placer M $(\alpha, \frac{1}{e})$ sur le graphique de A)1).

B) On étudie la suite (u_n) telle que : $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
On conseille d'utiliser le graphique de A)1).

❶ Quelles sont les valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est constante ?

❷ Soit $u_0 \in \left]0, 1/e\right[$. Montrer par récurrence que :

$\forall n \in N \quad , \quad 0 < u_n < \frac{1}{e}$

Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

❸ Soit : $u_0 \in \left]1/e, 1\right[$. Encadrer u_1. Etudier (u_n).

❹ Etudier le cas : $u_0 = 1$.

❺ Soit $u_0 \in \left]1, \alpha\right[$. Etudier (u_n).

❻ Soit : $u_0 \in \left]\alpha, e\right[$. Montrer que , $0 < u_n < e$.

Montrer que : $u_1 < u_0$.

Décrire les variations possibles de la suite (u_n) et les limites correspondantes.

❼Soit $u_0 > e$

Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$

En déduire que (u_n) est divergente.

Exercice

Soient A et B, deux matrices carrées.

❶ Montrer que A et B sont inversibles si et seulement si AB est inversible et dans ce cas
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

❷ Montrer que A est inversible si et seulement si A^p, $p \in N^*$, est inversible et dans ce cas $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

❸ Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n par récurrence.

❹ Vérifier que A^{-1} s'obtient en changeant θ en $-\theta$ dans A.

❺Vérifier que $(A^n)^{-1}$ existe.