

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

AVRIL 2001

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DU CALCUL NUMERIQUE

PROBLEME

1. Soit $g(x) = 1 + x - x \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x - x \ln x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} 1 + x \rightarrow 1 \\ x \ln x \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 \rightarrow 1 \\ \ln x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

b) $g'(x) = 1 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$

$$g'(x) = -\ln x$$

$$x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0 \text{ et } 0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$$

Tableau de variation de g



x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		croissante	décroissante
		1	$-\infty$

c) pour $x \in]0;1]$, $g(x) > 0$

pour $x \in]1;+\infty[$, g est continue et strictement décroissante avec $g(1) = 2$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β unique dans $]0;+\infty[$.

d) pour $x \in]0;\beta[$, $g(x) > 0$

pour $x \in]\beta;+\infty[$, $g(x) < 0$

e) $g(3,5) \approx 0,115$

$g(3,6) \approx -0,011$

donc $3,5 < \beta < 3,6$



2. Soit $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$ définie sur $]0;+\infty[$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \frac{1}{1+x} \cdot \ln x \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{1}{1+x} \rightarrow 1 \\ \ln x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ car } \begin{cases} \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x) - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + 1 - \ln x}{(1+x)^2} = \frac{1+x - x \ln x}{x(1+x)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ car $x(1+x)^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\beta)$	
		croissante	décroissante
		$-\infty$	2

c) L'abscisse du point A intersection de C et de la droite D d'équation $y = 2$ est

solution de l'équation $\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \in]0; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{\ln x}{1+x} = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Le point A a donc pour abscisse 1 et pour ordonnée 2.

Pour déterminer la position de C par rapport à D , étudions le signe de $f(x) - 2$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

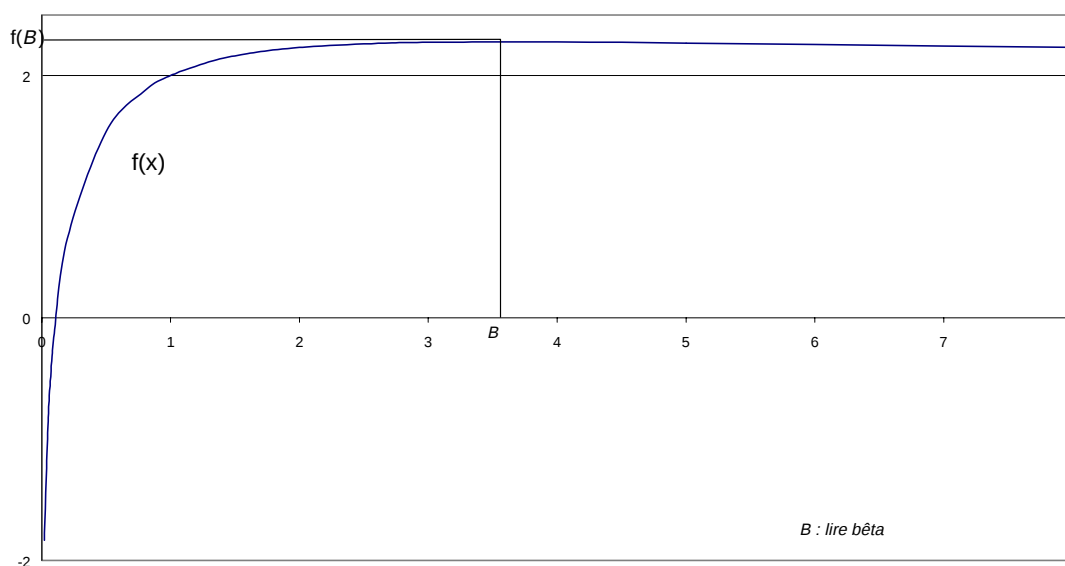
$$f(x) - 2 = \frac{\ln x}{1+x}$$



Comme $1+x > 0$, le signe de $f(x) - 2$ est le même que celui de $\ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - 2$		-	+
		C en dessous de D	A C au-dessus de D

On peut noter que D est asymptote à C au voisinage de l'infini car
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2) = 0$.



3. Soit $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x} dx$ pour $t \geq 1$

a) Comme $\ln(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, $I(t)$ représente l'aire en unités d'aire de la portion de plan définie par $\begin{cases} 1 \leq x \leq t \\ 2 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

b) Soit $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$ pour $t \geq 1$

Posons $p = \ln x$ ou $x = e^p$

La fonction $p \mapsto e^p$ est dérivable et strictement croissante d'où

$$J(t) = \int_{\ln 1}^{\ln t} \frac{p}{e^p} e^p dp = \int_0^{\ln t} p dp = \left[\frac{1}{2} p^2 \right]_0^{\ln t} = \frac{1}{2} (\ln t)^2$$

c) Soit $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$ pour $t \geq 1$

Intégrons par parties en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$K(t) = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^t - \int_1^t -\frac{1}{x^2} dx$$

$$K(t) = -\frac{1}{t} \ln t - \left[\frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$K(t) = -\frac{1}{t} \ln t - \frac{1}{t} + 1$$

$$K(t) = 1 - \frac{1 + \ln t}{t}$$

$$K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ avec } x \mapsto \frac{\ln x}{x^2} \text{ positive sur } [1; t], \forall t \geq 1.$$

Donc $K(t) \geq 0$ pour $t \geq 1$.

$$1 - K(t) = 1 - 1 + \frac{1 + \ln t}{t} = \frac{1 + \ln t}{t}$$

 **Fomesoutra**.com
ça soutra !

pour $t \geq 1$, $1 + \ln t \geq 0$ donc $1 - K(t) \geq 0$ d'où $K(t) \leq 1$

Pour $t \geq 1$, on a donc bien $0 \leq K(t) \leq 1$

d) Pour $x \geq 1$, on a $1 + x \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \geq 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

$$\text{Pour } x \geq 1, \text{ on a } x^2 + x \geq x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Pour } x \geq 1, \text{ on a donc } 0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

Pour $x \geq 1$, nous avons $\ln x \geq 0$ d'où

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{\ln x}{x^2}$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ étant intégrables sur $[1; +\infty[$, nous avons

$$0 \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Donc $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$

$$\text{e) } 0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t) \leq 1$$

$$0 \leq J(t) - I(t) \leq 1$$

$$-J(t) \leq -I(t) \leq 1 - J(t)$$

$$J(t) - 1 \leq I(t) \leq J(t)$$

$$\text{Pour } t \geq 1, (\ln t)^2 \geq 0$$

$$\frac{J(t) - 1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{J(t)}{(\ln t)^2}$$

$$\text{Or, } J(t) = \frac{(\ln t)^2}{2} \text{ donc } \frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln t)^2} = 0, \text{ on en déduit } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2} = \frac{1}{2}$$



EXERCICE

a) L'espace des tirages de 13 cartes parmi 52 comprend

$$C_{52}^{13} = \frac{52 \times 51 \times \dots \times 41 \times 40}{13!} \text{ événements élémentaires.}$$

L'événement « avoir 4 As dans une main » comprend $C_{48}^9 = \frac{48 \times 47 \times \dots \times 41 \times 40}{9!}$

événements élémentaires.

$$p(4 \text{ As}) = \frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,00264$$

b) L'événement «avoir 2 As dans une main» comprend

$$C_4^2 \times C_{48}^{11} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{48 \times 47 \times \dots \times 39 \times 38}{11!} \text{ événements élémentaires.}$$

$$p(2 \text{ As}) = \frac{C_4^2 \times C_{48}^{11}}{C_{52}^{13}} = 6 \times \frac{39 \times 38 \times 13 \times 12}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,213$$



c) Calculons la probabilité de ne pas avoir d'As $p(0As)$ et nous en déduirons la probabilité d'avoir au moins un As $1 - p(0As)$.

L'événement « ne pas avoir d'As dans une main » comprend

$$C_{48}^{13} = \frac{48 \times 47 \times \dots \times 37 \times 36}{13!} \text{ événements élémentaires.}$$

$$p(\text{au moins 1 As}) = 1 - p(0As) = 1 - \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} = 1 - \frac{39 \times 38 \times 37 \times 36}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,696$$