

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

DUREE : 2 HEURES

PROBLEME

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$
On note C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

- a) Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
- b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).
- c) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β unique dans $]0;+\infty[$.
- d) Déterminer le signe de g sur son ensemble de définition.
- e) Montrer que $3,5 < \beta < 3,6$.

2. Etude de f

- a) Etudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
- b) Exprimer la dérivée f' de f à l'aide de g et en déduire les variations de f .
- c) Construire la courbe C (unité graphique : 2 cm); on déterminera les coordonnées du point A d'intersection de C avec la droite D d'équation $y = 2$ et on indiquera la position de C par rapport à D .



3. Encadrement d'une intégrale

Pour tout élément t de $[1; +\infty[$, on pose $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{1+x} dx$.

On ne cherchera pas à calculer $I(t)$.

- a) Interpréter géométriquement cette intégrale à partir de la courbe C .
- b) Calculer l'intégrale $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$, où $t \geq 1$.
- c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$, où $t \geq 1$.
Montrer que $0 \leq K(t) \leq 1$.

d) Vérifier que pour tout élément $x \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$. En déduire que $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$.

e) Déterminer la limite de $\frac{I(t)}{(\ln t)^2}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

EXERCICE

Dans cet exercice, le jeu de cartes contient 52 cartes. Toutes sont distribuées entre 4 joueurs, chacun d'entre eux en recevant 13. Chaque ensemble de 13 cartes est appelé une main. On rappelle que les cartes sont réparties en 4 couleurs (carreau, coeur, pique, trèfle). Chaque couleur contient un As, un roi, une dame, un valet, un 10, un 9,...,un 2.



- a) Quelle est la probabilité d'avoir les 4 As dans une main ?
- b) Quelle est la probabilité d'avoir 2 As dans une main ?
- c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un As dans une main ?