ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt.$$

1. La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$ donc $0 \notin D_f$.

   - Si $x < 0$, il n'y a aucun problème de définition de l'intégrale car le dénominateur est défini, ne s'annule jamais et l'intervalle d'intégration reste borné.
   - Si $x > 0$, 1 est dans l'intervalle $\left[\frac{1}{x}, x\right]$ (pas forcément ordonné). Or :

   $$\frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} = \frac{t}{\sqrt[3]{(t-1)(t^2 + t + 1}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(t-1)}} \quad \text{quand} \quad t \to 1,$$

   dont l'intégrale converge en 1.

2. Soit la fonction g définie par :

   $$g(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt.$$

   Par les mêmes arguments que précédemment, il est clair que $D_g = \mathbb{R}$. Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ et calculons sa dérivée.

   - Si $x < 1$, il n'y a aucun problème de définition de l'intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}$ étant continue, g est donc dérivable en x et $g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$.

- Si $x > 1$, on écrit $g(x) = \displaystyle\int_0^2 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt + \int_2^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt.$

  L'intervalle (non forcément ordonné) $[2, x]$ ne contient pas 1. À nouveau, il est facile de conclure que g est dérivable et que $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

  On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

On écrit maintenant :

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt + \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right).$$

En utilisant les formules de dérivation des fonctions composées, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f'(x) = g'(x) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}} + \frac{1}{x^3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}-1}}.$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2}.$$

f' est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et on a clairement :

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = 0.$$

f' est donc prolongeable par continuité en 1. On sait alors que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3-1}{x^2\sqrt[3]{x^3-1}} \quad \text{et} \quad f'(1) = 0.$$

3. Soit $a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1\right) dt.$

   On a déjà vu que cette intégrale convergeait en 1.

   En $+\infty$, on peut écrire :

$$\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 = \left(1 - \frac{1}{t^3}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \sim 1 + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) - 1 = \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

   ce qui prouve également la convergence en $+\infty$.

   Comme 1 et $+\infty$ sont les seuls problèmes, l'intégrale a est convergente. On montre de manière analogue que b est convergente.

4. On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} dt - \int_{\frac{1}{x}}^{x} dt + \frac{1}{x} \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt = a$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Cela prouve donc que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = a,$$

ce qui montre que $x + a$ est asymptote à $f en + \infty$.

On montre de même que $x + b$ est asymptote à f en $-\infty$.

5. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x^2}$. Il est donc clair que f' est positive. f est donc croissante sur $\mathbb{R}^*$.

L'intégrale a est convergente et $\lim_{x \to 0^+} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} - 1 \right) dt = -a$.

De plus :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{\frac{1}{x}}^{x} 1.dt = \lim_{x \to 0^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

De la même façon :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

Enfin $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$. On a donc un point d'inflexion en $(1, 0)$ (car f est strictement croissante).

On a alors tous les éléments pour tracer le graphe de f.

PROBLÈME n^{0}1

1. Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, donc $x + \ln(1-x) \leq 0$. On en conclut que (u_n) est décroissante.

On constate également classiquement que pour tout $k \geq 1$:

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}.$$

On en tire pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t},$$

et par suite, en sommant sur k variant de 1 à n :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

Cette dernière inégalité prouve que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

(u_n) est donc décroissante et minorée par 0. Il existe donc $0 \leq \gamma \leq 1$ tel que :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

2. On définit la fonction f par :

$$\forall t \in]0,1[, \quad f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}.$$

On peut écrire :

$$\forall t \in]0,1[, \quad f(t) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{\ln(1-t)}\right).$$

En développant le ln à l'ordre 2 en 0 :

$$\frac{t}{\ln(1-t)} = \frac{t}{-t - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{2}\right)} = -\frac{1}{1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)} = -1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a alors :

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{quand} \quad t \to 0,$$

ce qui montre que :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{t \to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$. Donc :

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = 1.$$

Finalement, on peut prolonger f par continuité sur $[0,1]$ en $\widetilde{f}$ définie par :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \widetilde{f}(t) = f(t), \quad \widetilde{f}(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \widetilde{f}(1) = 1.$$

3. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

   En posant $t = 1 - e^{-u}$ qui est bien un changement de variable bijectif, on trouve :

$$I = \int_{+\infty}^{0} f(1-e^{-u})e^{-u}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\left(1 + \frac{e^{-u}-1}{u}\right)du.$$

   On a donc bien la forme recherchée avec $h(u) = 1 + \dfrac{e^{-u}-1}{u}$.

   (a) Soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u}du$.

   En 0, $\dfrac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} \sim \beta - \alpha$, il n'y a donc pas de problème.

   En $+\infty$, la décroissance rapide de l'exponentielle vers 0 fournit la convergence de l'intégrale.

   Il est clair que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u}du = \lim_{X\to+\infty}\left(\int_0^X \frac{e^{-\alpha u}-1}{u}du - \int_0^X \frac{e^{-\beta u}-1}{u}du\right).$$

   En faisant les changements de variable $v = \alpha u$ dans la première intégrale et $v = \beta u$ dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{e^{-\alpha u}-1}{u}du - \int_0^X \frac{e^{-\beta u}-1}{u}du &= \int_0^{\alpha X} \frac{e^{-u}-1}{u}du - \int_0^{\beta X} \frac{e^{-u}-1}{u}du \\
&= \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u}du + \int_{\alpha X}^{\beta X} \frac{1}{u}du \\
&= \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u}du + \ln\frac{\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

   La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du$ permet d'affirmer que :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_{\beta X}^{\alpha X} \frac{e^{-u}}{u}du = 0.$$

   On trouve finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u}du = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

   (b) On a montré précédemment que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\left(1 + \frac{e^{-u}-1}{u}\right)du$.

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} = \frac{e^{-u}(1-e^{-nu}+e^{-nu})}{1-e^{-u}} = \sum_{k=1}^{n} e^{-ku} + \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}}.$$

En remplaçant cette expression dans l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-ku} + \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}}\right)\left(1+\frac{e^{-u}-1}{u}\right) du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-ku} du + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)u}-e^{-ku}}{u} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{k+1} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&= u_n + \ln \frac{n}{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du.
\end{aligned}$$

Soit maintenant la suite J_n définie, pour $n > 0$, par :

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-nu} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du.$$

h étant une fonction positive, on peut écrire, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\delta} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du + \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du + e^{-n\delta} \int_\delta^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du \\
&\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du + e^{-n\delta} I.
\end{aligned}$$

I étant convergente en 0, on sait que $\lim_{\delta \to 0} \int_0^{\delta} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du = 0$. Donc, pour $\varepsilon_0 > 0$ donné, il existe $\delta_0 > 0$ tel que :

$$\int_0^{\delta_0} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du < \varepsilon_0.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} e^{-n\delta_0} = 0$, il existe N_0 tel que l'on ait :

$$\forall n > N_0, \quad e^{-n\delta_0} I < \varepsilon_0.$$

Donc il existe N_0 tel que l'on ait :

$$\forall n > N_0, \quad J_n < 2\varepsilon_0.$$

$\varepsilon_0 > 0$ ayant été fixé arbitrairement, on a en fait montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.
Or on avait montré que :

$$I = u_n + \ln\frac{n}{n+1} + J_n.$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette expression, on trouve finalement que $I = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ qui est ce que l'on devait démontrer.

PROBLÈME n^{0}2

Question préliminaire : $S_n(x)$ est impaire et périodique de période 2π, on peut donc restreindre l'étude sur $[0,\pi]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n :

$$\forall t \in]0,x], \quad f_n(t) = \frac{\cos\dfrac{(n+1)\,t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$

   (a) Il est clair que $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = n$. f_n est donc prolongeable par continuité en 0.

   (b) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= \frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}e^{it} \\
&= \frac{\left(e^{it}-e^{i(n+1)t}\right)\left(1-e^{-it}\right)}{2(1-\cos t)} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}}\left(e^{-in\frac{t}{2}}-e^{in\frac{t}{2}}\right)\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)}{4\sin^2\dfrac{t}{2}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\dfrac{t}{2}}\left(-2i\sin n\dfrac{t}{2}\right)\left(2i\sin\dfrac{t}{2}\right)}{4\sin^2\dfrac{t}{2}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)\frac{t}{2}}\sin n\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.
\end{aligned}$$

En prenant alors la partie réelle de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\cos (n+1)\frac{t}{2} \sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

(c) Il est clair que $\displaystyle\int_0^x \cos (kt)dt = \frac{\sin (kx)}{k}$, d'où l'égalité recherchée.

(d) En faisant le changement de variable $t = 2u$, on trouve :

$$S_n(x) = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\cos ((n+1)u) \sin (nu)}{\sin u} du.$$

Mais $\cos ((n+1)u) = \cos (nu) \cos u - \sin (nu) \sin u$, ce qui remplacé dans l'intégrale donne :

$$S_n(x) = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\cos (nu) \sin (nu) \cos u}{\sin u} du - 2\int_0^{\frac{x}{2}} \sin^2 (nu)du.$$

D'une part $2\cos (nu) \sin (nu) = \sin (2nu)$ et d'autre part,

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \sin^2 (nu)du = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1-\cos (2nu)}{2} du = \frac{x}{4} - \frac{\sin (nx)}{4n}.$$

On en déduit alors :

$$S_n(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin (2nu) \cos u}{\sin u} du - \frac{x}{2} + \frac{\sin (nx)}{2n}.$$

2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin (2nu) \cos u}{\sin u} du$ et on définit l'application g par :

$$\forall t \in \left]0, \frac{x}{2}\right], \quad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

(a) Développons la fonction g au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{t\cos t}{\sin t} - 1\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)} - 1\right), \\
&= \frac{1}{t}\left(-\frac{t^2}{3}+o(t^2)\right) \\
&= -\frac{t}{3}+o(t)
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand t tend vers 0. g est donc bien prolongeable par continuité en 0.

(b) Immédiat.

3. On s'intéresse à $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b \sin(nt)h(t)dt$.

(a) Si pour tout t dans $[a,b]$, $h(t)=\alpha$ où α est une constante, on a :

$$\int_a^b \sin(nt)h(t)dt = \alpha\frac{\cos na-\cos nb}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n\to+\infty$$

La généralisation à h en escalier se fait en découpant l'intégrale sur les intervalles où h est constante et en utilisant ce résultat sur chacun des intervalles.

(b) On suppose connu que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall t\in[a,b],\quad |h(t)-\varphi(t)|\leq\varepsilon.$$

On a alors :

$$\left|\int_a^b \sin(nt)h(t)dt-\int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt\right| \leq \int_a^b |\sin(nt)||h(t)-\varphi(t)|dt \leq \varepsilon(b-a).$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt=0.$$

Donc il existe N tel que pour $n>N$ on ait :

$$\left|\int_a^b \sin(nt)\varphi(t)dt\right|\leq\varepsilon.$$

Donc pour $n>N$,

$$\left|\int_a^b \sin(nt)h(t)dt\right|\leq\varepsilon(b-a)+\varepsilon.$$

ε étant arbitrairement petit, on a en fait montré que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sin(nt)h(t)dt=0.$$

4. (a) Soit l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.

En 0, $\dfrac{\sin t}{t}\sim 1$, il n'y a donc pas de problème.
Soit l'intégrale :

$$I_X=\int_1^X \frac{\sin t}{t}dt.$$

On intègre par parties en dérivant $\frac{1}{t}$ et en intégrant le sinus :

$$I_X = -\int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt - \frac{\cos X}{X} + \cos 1.$$

D'une part, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est clairement absolument convergente et d'autre part, $\lim_{X \to +\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$.

On déduit de ces deux propriétés la convergence de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est donc convergente et on admet qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

(b) On a vu que $I_n = \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(2nu) g(u) du + \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu)}{u} du$.

D'après la question 3.(a) :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(2nu) g(u) du = 0.$$

En faisant le changement de variable $t = 2nu$ dans la deuxième intégrale, on trouve :

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2nu)}{u} du = \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u} du.$$

D'après la question 4.(a), si $x > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{nx} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, $I_n(0) = 0$ et si $x > 0$, $\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \frac{\pi}{2}$.

(c) On a de manière évidente :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad S(x) = I(x) - \frac{x}{2}.$$

Donc :

$$\forall x \in]0, \pi], \quad S(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{et} \quad S(0) = 0.$$

L'application S est donc discontinue en 0 et continue sur $]0, \pi]$.

Comme S est 2π-périodique, S est discontinue en tout point de la forme $2k\pi$ où k est un entier relatif et continue sur $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(d) On trace aisément le graphe de S.