ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

EXERCICE

On pose, x désignant un nombre réel,

$$f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}\,dt\,.$$

❶ Déterminer les réels x pour lesquels l'intégrale ci-dessus existe.

On note D_f l'ensemble correspondant.

❷ Montrer que f est continue et dérivable sur D_f. Calculer $f'(x)$ pour $x\in\mathrm{D}_f$.

On étudiera soigneusement la dérivabilité de f en 1.

❸ Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}-1\right)dt$ et $\int_{-\infty}^{0}\left(1-\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}\right)dt$ convergent.

On pose : $a=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}-1\right)dt$ et $b=\int_{-\infty}^{0}\left(1-\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}\right)dt$.

❹ Montrer que la droite d'équation $y = x + a$ (resp. $y = x + b$) est asymptote à la courbe représentative de f quand $x \to +\infty$ (resp. quand $x \to -\infty$).

On écrira, pour $x \in \mathrm{D}_f$, $f(x) - x = \int_{\frac{1}{x}}^{0} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} dt + \int_{0}^{x} \left(\frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}} - 1 \right) dt$.

❺ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

PROBLEME n° 1

❶ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$ ($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

En étudiant, par exemple, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

On note $\gamma = \lim_{n \to +\infty} (u_n)$.

❷ Soit $t \in]0,1[$ et $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}$.

Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

On note $I = \int_0^1 f(t) dt$ et l'on souhaite montrer que $\gamma = I$.

❸ A l'aide du changement de variable : $t = 1 - e^{-u}$, montrer l'égalité

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \times h(u)}{1 - e^{-u}} du$$

où h est une fonction réelle définie sur des réels strictement positifs.

① Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{u} du$ converge et vaut $\ln \frac{\beta}{\alpha}$.

② En déduire que $\gamma = I$.

PROBLEME n° 2

On pose, x désignant un nombre réel et n un entier supérieur ou égal à 1 :

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \ .$$

On se propose de montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge sur $\Re$ tout entier et de calculer sa somme.

On note : $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \quad (x \in \mathrm{R}, n \in \mathrm{N} - \{0\})$.

Question préliminaire : montrer que l'on peut limiter l'étude aux valeurs de x situées dans l'intervalle $]0, \pi]$.

Dans la suite du problème, on désigne par x un réel quelconque situé dans cet intervalle.

❶ On note f_n l'application définie par :

$$(\forall t \in]0, x]) \qquad f_n(t) = \frac{\cos(n+1)\, t/2 \times \sin n\, t/2}{\sin t/2} \qquad (n \in \mathrm{N} - \{0\}).$$

① Montrer que f_n se prolonge par continuité en 0. On désigne encore par f_n l'application ainsi prolongée.

② Montrer alors l'égalité :

$$(\forall t \in [0, x]) \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos kt = f_n(t) \ .$$

③ En déduire que l'on a $S_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

④ A l'aide du changement de variable $t = 2u$, montrer l'égalité :

$$S_n(x) = \int_0^{x/2} \frac{\sin 2nt \times \cos t}{\sin t} dt - \frac{x}{2} + \frac{\sin nx}{2n} \ .$$

❷ On note : $I_n = \int_0^{x/2} \frac{\sin 2nt \times \cos t}{\sin t} dt$.

Soit g l'application définie par :

$$\left(\forall t \in \left]0, \frac{x}{2}\right]\right) \qquad g(t) = \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} .$$

① Montrer que g se prolonge par continuité sur l'intervalle $\left[0, \frac{x}{2}\right]$.

On désigne encore par g l'application ainsi prolongée.

② Vérifier l'égalité :

$$I_n = \int_0^{x/2} \sin 2nt \times g(t) dt + \int_0^{x/2} \frac{\sin 2nt}{t} dt .$$

❸ Soit $(a,b) \in \mathrm{R}^2$ $(a \prec b)$. Soit $h:[a,b] \to \Re$ une application *continue*. On souhaite montrer le résultat suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \sin nt \times h(t) dt = 0 .$$

① Montrer le résultat lorsque h est constante sur $[a,b]$, puis lorsque h est une fonction en escaliers.

② Dans le cas général ou h est supposée continue sur $[a,b]$, on admettra le résultat suivant :

« Pour tout réel $\varepsilon \succ 0$ fixé, il existe une fonction φ en escaliers sur $[a,b]$ telle que l'on ait :

$$\left(\forall t \in [a,b]\right) \qquad \left|h(t) - \varphi(t)\right| \leq \varepsilon \quad ».$$

On utilisera alors la question 3) a).

❹ ① Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

② Déduire des questions 3) et 4) a) que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge. Quelle est sa limite ?

❺ ① Montrer que la suite $(S_n(x))_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

On note : $S(x) = \lim_{n\to+\infty} (S_n(x))$ $\left(= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \right)$.

② L'application S est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

③ Représenter graphiquement l'application S . On mettra notamment en évidence ses points de discontinuité.