CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
AVRIL 1999

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION MATHEMATIQUES

VOIE B

*

*   *

EXERCICE n° 1

❶ Soit a vecteur de E tel que $\varphi(a) \neq 0$ (a existe et est non nul si φ non identiquement nulle).

Alors, pour tout x de E, $x = (x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$. On vérifie aisément que le premier terme de la somme appartient à H et que le second appartient à Vect(a) où Vect(a) désigne l'espace vectoriel engendré par le vecteur a.

Donc $E = H + Vect(a)$. En outre, pour tout vecteur non nul c de Vect(a), il existe k réel non nul tel que c=ka donc $\varphi(c) = k\varphi(a) \neq 0$. Donc $H \cap Vect(a) = \{0_E\}$ donc $E = H \oplus Vect(a)$.

On en déduit que $\dim E = \dim H + \dim Vect(a)$ d'où $\dim H = n - 1$.

❷ Soit $(e_1,...,e_{n-1})$ une base de H. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_n tel que $(e_1,...,e_{n-1},e_n)$ base de E.

Soit $(\varphi_1,...,\varphi_n)$ la base duale associée alors pour tout x de E, $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ et $x \in H \Leftrightarrow \varphi_n(x) = 0$ i.e. $H = Ker\varphi_n$.

EXERCICE n° 2

Pour tout A de G, on considère l'ensemble $F = \{A^k, k \in Z\}$ où Z désigne l'ensemble des entiers relatifs.

Comme G est borné, F est borné.

Montrons qu'alors, pour tout A de G, A et diagonalisable et les éléments de son spectre sont de module 1.

Comme le corps des complexes C est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A est scindé sur C i.e. il a toutes ses racines dans C.

On sait alors qu'il existe $P \in GL(n,C) \,/\, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 + N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s I_s + N_s \end{pmatrix}$ où λ_i désigne la ième valeur propre, I_i la matrice identité de taille l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i et N_i une matrice nilpotente de même taille.

Alors, $P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_1 + N_1)^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_s I_s + N_s)^k \end{pmatrix}$ pour tout k de Z.

Comme l'application de l'ensemble des matrices à coefficients complexes d'ordre n dans lui-même qui à tout U de associe $P^{-1}UP$ est bijective et continue, dire que les A^k sont bornées équivaut à dire que les $P^{-1}A^kP$ le sont aussi.

De plus, montrer que les $P^{-1}A^kP$ sont bornées équivaut à montrer que pour tout $i = 1, \dots s, (\lambda_i I_i + N_i)^k$ bornée.

Si pour tout k de Z, et pour tout $i = 1, \dots s, (\lambda_i I_i + N_i)^k$ cela est en particulier vrai pour tout k entier naturel. Donc pour tout $i = 1, \dots, s, |\lambda_i| < 1$ ou $\{|\lambda_i| = 1$ et $N_i = 0\}$.

De même, si on raisonne sur A^{-1}, il existe $Q \in GL(n,C) / Q^{-1}A^{-1}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} I_1 + M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_s} I_s + M_s \end{pmatrix}$

et on doit donc avoir pour tout i=1,...,s, $\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| < 1$ ou $\left\{ \left|\frac{1}{\lambda_i}\right| = 1 \text{ et } M_i = 0 \right\}$.

D'où, nécessairement, pour tout i=1,...,s, $|\lambda_i| = 1$ et $N_i = 0$ i.e. A est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Comme G est commutatif et que tous ses éléments sont diagonalisables, on peut appliquer le théorème de diagonalisation simultanée.

PROBLEME

Partie 1

❶ $V_2(a_1,a_2) = a_2 - a_1$ et $V_3(a_1,a_2,a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$.

❷ Si $\exists i, j / a_i = a_j$ alors le déterminant a 2 lignes identiques, il est donc nul.

❸ ① D'après 1) la propriété est vraie au rang 2.

② Supposons la propriété vraie au rang n. Les racines du polynôme sont $a_1,\ldots a_n$. Le polynôme a n racines distinctes, il est donc de degré n.

③ En développant le déterminant $P(x)$ par rapport à sa dernière colonne, on trouve que le coefficient de x^n vaut $V_n(a_1,\ldots a_n)$.

Le polynôme $P(x)$ s'écrit donc : $V_n(a_1,\dots a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ soit en remplaçant x par a_{n+1}, comme la propriété est supposée vraie au rang n, on en déduit que :

$$P(x)=V_n(a_1,\dots a_n)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=\prod_{1\le k<l\le n+1}(a_l-a_k)\ .$$

La propriété est vraie au rang 2. Si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang n+1. La propriété est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 2.

Partie 2

❶ Si pour tout k, $P_k(x)=x^k$, $\Delta_n(x_1,\dots,x_n)=V_n(x_1,\dots,x_n)$.

❷ ① B est une famille de n polynômes échelonnée. C'est donc une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n-1.

② On en déduit que $P_{n-1}(x)=\lambda_{n-1}x^n+\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x)$

③ En remplaçant dans le déterminant Δ_n, on trouve que :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x_1)+\lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x_2)+\lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i P_i(x_n)+\lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

, soit en enlevant à la dernière colonne la somme de n-1 premières colonnes pondérée par les coefficients α_i, on trouve :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

avec λ_{n-1} le coefficient de $P_{n-1}(x)$ affecté au vecteur x^{n-1} dans sa décomposition dans la base B i.e. le coefficient du terme de plus haut degré de $P_{n-1}(x)$.

De même, si $\lambda_i, i=0,\dots,n-2$ désigne le coefficient du terme de plus haut degré de $P_i, i=0,\dots,n-2$, on en déduit que $\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_{n-2} x_1^{n-2} & \lambda_{n-1} x_1^{n-1} \\ \lambda_0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-2} x_2^{n-2} & \lambda_{n-1} x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 x_n & \cdots & \lambda_{n-2} x_n^{n-2} & \lambda_{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Soit en factorisant la ième colonne par λ_{i-1}, on trouve que $\Delta_n = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} V_n(x_1, \dots x_n)$.

❸ C_k^x est un polynôme de degré k et son terme de plus haut degré vaut $\frac{1}{k!}$.
Donc, $C_n = \frac{1}{1!}\frac{1}{2!}\cdots\frac{1}{(n-1)!}V_n(x_1,\dots x_n)$.

Partie 3

❶ Montrons par récurrence que pour tout k, entier naturel, il existe un polynôme T_k de degré k tel que $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$ et que le terme de plus haut degré vaut 2^k.

$\cos(0.\theta) = 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie jusqu'au au rang n, alors :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos\theta\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) = T_1(\cos\theta)T_n(\cos\theta) - \sin\theta\frac{1}{n}\sin\theta\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)$$

car $\sin(n\theta) = -\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}(\cos(n\theta)) = -\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}(T_n(\cos\theta)) = -\frac{1}{n}\sin\theta\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)$

d'où $\cos((n+1)\theta) = T_1(\cos\theta)T_n(\cos\theta) - \frac{1}{n}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)$,

donc $\cos((n+1)\theta)$ s'écrit comme somme et produit de polynômes en $\cos\theta$. C'est donc un polynôme en $\cos\theta$.

De plus, le terme de plus haut degré est le terme de plus haut degré du produit $T_1(\cos\theta)T_n(\cos\theta)$, soit d'après l'hypothèse de récurrence $2.2^k = 2^{k+1}$.

La propriété est vraie au rang 0.

Si elle est vraie jusqu'au rang n alors elle est vraie au rang n+1.

La propriété est donc vraie pour tout n entier naturel.