ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve est composée de deux exercices et de d'un problème, tous indépendants.

« Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité, de la présentation et de l'orthographe ».

EXERCICE n° 1

Soient E un espace vectoriel sur le corps des réels (noté R) de dimension finie n et H un sous espace vectoriel de E.

❶ Soit φ une application linéaire non identiquement nulle de E dans R appelée aussi **forme linéaire**.

On suppose que $H = Ker\varphi$ où $Ker\varphi$ désigne le noyau de φ.

Montrer qu'il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H \oplus Vect(a)$ où $\oplus$ est le symbole de la somme directe et $Vect(a)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur a.

En déduire que la dimension de H vaut n-1 c'est-à-dire que H est un **hyperplan** de E.

❷ Soit L un sous espace vectoriel de E de dimension n-1. Montrer qu'il existe une forme linéaire dont L est le noyau.

On pourra appliquer le théorème de la base incomplète et considérer la base duale associée.

EXERCICE n° 2

On désigne par GL(n,C) l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n à coefficients complexes.

Soit G un sous-groupe multiplicatif, borné et commutatif de GL(n,C).

Montrer qu'il existe P appartenant à GL(n,C) telle que pour tout A appartenant à G, $P^{-1}AP$ soit diagonale.

PROBLEME

Partie 1

Soit le déterminant $V_n(a_1,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ où $(a_1,\ldots,a_n) \in IR^n$.

❶ Calculer $V_2(a_1,a_2)$ et $V_3(a_1,a_2,a_3)$.

❷ Que vaut $V_n(a_1,\ldots,a_n)$ si il existe un couple (i,j) tel que $a_i = a_j$ et $i \neq j$?

On supposera dans toute la suite que $\forall i \neq j,\ a_i \neq a_j$

❸ On se propose de montrer par récurrence que $V_n(a_1,...,a_n) = \prod_{k<l}(a_l - a_k)$

① Montrer que la propriété est vraie au rang 2.

② On suppose la propriété vraie au rang n.

Soit le polynôme $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}$.

Quelles sont ses racines ? En déduire son degré.

En développant ce déterminant par rapport à sa dernière colonne, en déduire le coefficient du terme de plus haut degré de $P(x)$.

Conclure.

Partie 2

Soit le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$

où P_k est un polynôme de degré k.

❶ Calculer Δ_n lorsque pour tout $k = 0,...,n-1,$ on a $P_k(x) = x^k$.

❷ On se replace dans le cas général où P_k est un polynôme de degré k à coefficients réels.

① Montrer que $B = (P_0,...,P_{n-2}, X^{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à (n-1).

② En déduire une écriture de P_{n-1} dans cette base.

③ Remplacer la dernière colonne du déterminant par l'expression de P_{n-1} dans la base B.

Montrer alors que Δ_n peut se mettre sous la forme :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-2}(x_1) & \lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ P_0(x_2) & \cdots & \cdots & P_{n-2}(x_2) & \lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-2}(x_n) & \lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où λ_{n-1} est un coefficient réel que l'on définira.

④ Montrer que :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_{n-2}x_1^{n-2} & \lambda_{n-1}x_1^{n-1} \\ \lambda_0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-2}x_2^{n-2} & \lambda_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & \lambda_1 x_n & \cdots & \lambda_{n-2}x_n^{n-2} & \lambda_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où λ_{n-1} et λ_{n-2} sont des coefficients réels que l'on définira.

En déduire que $\Delta_n = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}V_n(x_1,\ldots x_n)$ où $\lambda_0,\lambda_1,\ldots\lambda_{n-1}$ sont des coefficients réels que l'on définira.

❸ Application :

Calculer $C_n = \begin{vmatrix} C_0^{x_1} & C_1^{x_1} & \cdots & \cdots & C_{n-1}^{x_1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ C_0^{x_n} & C_1^{x_n} & \cdots & \cdots & C_{n-1}^{x_n} \end{vmatrix}$ avec $C_k^x = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$

Partie 3

Soit $\theta \in [0,2\pi]$.

On se propose de calculer $\Omega_n = \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin(2\theta_1) & \cdots & \sin(n\theta_1) \\ \sin\theta_2 & \sin(2\theta_2) & \cdots & \sin(n\theta_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\theta_n & \sin(2\theta_n) & \cdots & \sin(n\theta_n) \end{vmatrix}$

❶ Montrer que pour tout k, entier naturel, il existe un polynôme T_k de degré k tel que $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$. Quel est le coefficient du terme de plus haut degré ?

❷ En dérivant les deux termes de l'égalité $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$, donner une expression de $\sin(k\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et $T_k^{'}(\cos\theta)$ ($T_k^{'}$ désigne la dérivée du polynôme T_k).

❸ En déduire la valeur de Ω_n.