CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE I

On applique la formule de Taylor :

$$\begin{cases} P(X+a_0) = P(X) + \frac{a_0}{1!} P'(X) + \ldots + \frac{a_0^n}{n!} P^{(n)}(x) \\ \vdots \\ P(X+a_n) = P(X) + \frac{a_n}{1!} P'(X) + \ldots + \frac{a_n^n}{n!} P^{(n)}(x) \end{cases}$$

On sait que les polynômes $P(X), \ldots, P^{(n)}(X)$ forment une base de l'espace $R_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré n car ils constituent une famille échelonnée.

Donc $(P(X+a_0), \ldots, P(X+a_n))$ forment une base de $R_n[X]$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible. C'est le cas car son déterminant est un déterminant de Vandermond (non nul si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

EXERCICE II

1) Par l'absurde :
si A non inversible, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_n C_n = 0$ (1) où $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A. Il existe i_0 tel que pour tout $j \neq i_0, \left|\lambda_j\right| \leq \left|\lambda_{i_0}\right|$ (2)

Alors la relation (1) donne $\lambda_1 a_{i_0 1} + \ldots + \lambda_{i_0} a_{i_0} + \ldots + \lambda_n a_{i_0 n} = 0$ d'où

$\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0} = -\sum_{j \neq i_0} \lambda_j a_{i_0 j} \Rightarrow \left|\lambda_{i_0} a_{i_0 i_0}\right| \leq \sum_{j \neq i_0} \left|\lambda_j a_{i_0 j}\right| \leq \left|\lambda_{i_0}\right| \sum_{j \neq i_0} \left|a_{i_0 j}\right|$ contradiction avec l'hypothèse

$\forall i, \left|a_{ii}\right| > \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}\right|$.

2) On sait que $I, B, \dots, B^{n^2}$ est une famille à n^2+1 éléments dans l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes donc elle est liée. Donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_0 I + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$ alors $\lambda_k B^k + \dots + \lambda_{n^2} B^{n^2} = 0$. Comme B inversible, on peut multiplier la dernière équation par B^{-k-1} d'où $B^{-1} = -\frac{1}{\lambda_k}(\lambda_{k+1} I + \dots + \lambda_{n^2} A^{n^2})$. Ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit $J = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C(0,0,1)$

$C(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2$

$$J^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -12 \\ 6 & -2 & 36 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -2I + 6J$$

Donc, par récurrence immédiate, $\forall k \in N, J^k \in Vect(I, J, J^2)$

Donc comme C^{-1} est un polynôme en J, $C^{-1} \in Vect(I, J, J^2)$ donc C^{-1} est de la forme cherchée.

PROBLEME

Partie I :

L'espace E est euclidien donc pour toute forme linéaire φ de E, il existe un unique vecteur $v / \forall u \in E, \varphi(u) = \langle u, v \rangle$. Alors pour tout $y \in E, \langle f(u), y \rangle$ est une forme linéaire donc il existe un unique vecteur noté $f^*(y)$ tel que $\langle f(u), y \rangle = \langle u, f^*(y) \rangle$.

Il reste à montrer la linéarité de l'application f^* ainsi définie :

$\langle x, f^*(y+y') - (f^*(y) + f^*(y')) \rangle = \langle f(x), y+y' \rangle - \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y' \rangle = 0$

De même, pour tout a réel et pour tout y, $\langle x, f^*(ay) - af^*(y) \rangle = \langle f(x), ay \rangle - a\langle f(x), y \rangle = 0$.

2) si f^* admet comme matrice dans une base orthonormée B alors $(B)_{ij}$ est la composante de $f^*(e_j)$ sur le vecteur e_i i.e. $B_{ij} = \langle e_i, f^*(e_j) \rangle = \langle f(e_i), e_j \rangle = (A)_{ji}$. Où A est la matrice de f dans cette même base orthonormée.

$\langle x, (f+g)^*(y) \rangle = \langle (f+g)(x), y \rangle = \langle x, (f^* + g^*)(y) \rangle$

3) $\langle x, (\lambda f)^*(y) \rangle = \langle \lambda f(x), y \rangle = \langle x, \lambda f^*(y) \rangle$

$\langle x, (f \circ g)^*(y) \rangle = \langle (f \circ g)(x), y \rangle = \langle g(x), f^*(y) \rangle = \langle x, g^* \circ f^*(y) \rangle$

4) Si $f(F) \subset F$, $\forall y \in F^\circ, \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle = 0$ car $f(x) \in F$ donc $f^*(y) \in F^\circ$

Inversement, si F° stable, alors $F^{\circ\circ} (\supset F)$ est stable par $f^{**} = f$ et comme $\begin{cases} E = F \oplus F^\circ \\ E = F^\circ \oplus F^{\circ\circ} \end{cases}$ avec l'égalité des dimensions, on a $F = F^{\circ\circ}$

6) On sait qu'une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique. On a montré que la matrice de l'adjoint d'une application dans une base orthonormée est égale à la transposée de cette application d'où la conclusion.

Partie II

1) Soit f un endomorphisme normal et soit $P(f)=a_0+a_1 f+\ldots+a_n f^n$ alors il est évident que $P(f)\circ P(f^*)=P(f^*)\circ P(f)$ donc $P(f)$ est normal.
2) Pour tous les sous-espaces propres de f endomorphisme normal, il existe un polynôme P tel que ce sev propre est un noyau de $P(f)$ or $P(f)(x)=0 \Leftrightarrow \langle P(f)(x),P(f)(x)\rangle=0$ et $\langle P(f)(x),P(f)(x)\rangle=\langle x,P(f^*)\circ P(f)(x)\rangle=\langle x,P(f)\circ P(f^*)(x)\rangle=\langle P(f^*)(x),P(f^*)(x)\rangle$

d'où $\langle P(f^*)(x),P(f^*)(x)\rangle=0$

d'où $P(f^*)(x)=0$

3) Soit x et y tels que $\begin{cases} f(x)=\lambda x \\ f(y)=\propto y \\ \lambda\neq\propto \end{cases}$, $\langle f(x),y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle=\langle x,\propto y\rangle$ d'où $(\lambda-\propto)\langle x,y\rangle=0$ et comme

$\lambda\neq\propto, \langle x,y\rangle=0$.

4), 5) et 6) soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base orthonormée de F sous espace stable par f . Complétons cette base par une base orthonormée $(e_{p+1},\ldots,e_n)$ alors dans cette base la matrice de f peut s'écrire : $\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ donc celle de f^* dans cette même base s'écrit $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tD & {}^tC \end{pmatrix}$. Comme f est normale, matriciellement (1)

$A{}^tA+D{}^tD={}^tAA$ et ${}^tDD=C{}^tC+D{}^tD$ alors $(1)\Rightarrow tr(D{}^tD)=0\Rightarrow \sum_{i,j} d_{ij}^2=0\Rightarrow D=0$.

Donc la matrice de f dans la base considérée est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et celle de f^* est $\begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tC \end{pmatrix}$ avec $A{}^tA={}^tAA$ et ${}^tDD=D{}^tD$ ce qui implique que F et F° sont stables par f et f^* et que les restrictions de f à F et F° sont des endomorphismes normaux.

Partie III

1) Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice d'un endomorphisme normal. Alors, $A{}^tA={}^tAA\Rightarrow b^2-c^2=0$ et $(a-d)(b-c)=0$

Si $b=c$ les 2 équations sont vérifiées

Si $b\neq c, \begin{cases} a=d \\ b=-c\neq 0 \end{cases}$

d'où 2 écritures possibles pour A : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec b non nul dans la seconde expression.

Cette seconde expression peut aussi s'écrire $\rho\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si on pose $a-ib=\rho e^{i\theta}, \theta\neq k\pi, k\in Z$

La première expression est celle d'une matrice symétrique donc cette matrice est diagonalisable.

2) Par récurrence sur n dimension de E.*
C'est évident si n=1.
On suppose la propriété vraie au rang n-1.
En dimension n, on sait que f admet un sous espace stable de dimension 1 ou 2. En effet, le polynôme caractéristique de f peut se factoriser en produit de polynômes de degrés 1 ou 2. Si il existe un facteur de degré 1, on a une droite vectorielle stable par f, sinon, on aura un plan vectoriel stable par f.
Soit F un sous-espace stable par f de dimension 1 ou 2 et soit F° son orthogonal dans E. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à F et F° : il existe 2 bases orthonormées de F et F° telles que dans chacune de ces bases f a la forme exigée. Il ne reste plus qu'à considérer la base orthonormée constituée de la réunion de chacune de ces bases.

3) Le polynôme caractéristique s 'écrira alors : $\chi_A(T) = \prod_i (\lambda_i - T)^{a_i} \prod_j (T^2 - 2\rho_j \cos\theta_j T + \rho_j^2)$

4) A est orthogonalement semblable à $$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} & & \\ & 0 & & \begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix} & \\ & & & & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$