ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

L'épreuve est composée de deux exercices et de d'un problème, tous indépendants.

« Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité, de la présentation et de l'orthographe ».

EXERCICE n° 1

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n.

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

Montrer que $P(X + a_0), P(X + a_1), \ldots, P(X + a_n)$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré n à coefficients réels.

EXERCICE n° 2

❶ Soit $A=(a_{ij})_{i=1...n,j=1...n}$ une matrice à coefficients complexes telle que $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ pour tout $i=1,\dots,n$.
Montrer que A est inversible.

❷ Si B matrice inversible à coefficients complexes, montrer que son inverse B^{-1} s'écrit $B^{-1}=\sum_{k=0}^{K} b_k B^k$.

❸ Soit $C=\begin{pmatrix} a & -2c & -2b \\ b & a+6c & 6b-2c \\ c & b & a+6c \end{pmatrix}=C(a,b,c)$ où a,b,c sont trois complexes.

Montrer que si C est inversible, son inverse C^{-1} est de la même forme, c'est-à-dire qu'il existe α,β,γ complexes tels que $C^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha & -2\gamma & -2\beta \\ \beta & \alpha+6\gamma & 6\beta-2\gamma \\ \gamma & \beta & \alpha+6\gamma \end{pmatrix}=C(\alpha,\beta,\gamma)$.

Indication : on pourra calculer $J=C(0,1,0)$ et J^2.

Problème

Dans tout le problème qui suit, $(E,\langle .,.\rangle)$ est un espace vectoriel euclidien et $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire associé. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $(E,\langle .,.\rangle)$.

Partie I

❶ Soit f élément de $L(E)$, montrer qu'il existe un unique f^* élément de $L(E)$ tel que pour tout (x,y) éléments de E , $\langle f(x),y\rangle=\langle x,f^*(y)\rangle$. f^* est appelé adjoint de f .

❷ Montrer que si f admet comme matrice A dans une base orthonormée, alors f^* admet comme matrice la transposée de A (notée ${}^tA$) dans cette même base.

❸ Montrer que pour tout (f,g) de $L(E)$ et pour tout λ réel :

$(f+g)^* = f^* + g^*$

$(\lambda f)^* = \lambda f^*$

$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

❹ Soit F un sous espace vectoriel de E et F° désigne son orthogonal dans E c'est-à-dire $F \overset{\perp}{\oplus} F^\circ = E$. Montrer que F est stable par f si et seulement si F° est stable par f^*.

❺ Montrer que $Ker(f^*) = (\operatorname{Im} f)^\circ$ et $\operatorname{Im}(f^*) = (Ker f)^\circ$ où $Ker f$ désigne le noyau de f et $\operatorname{Im} f$ désigne l'image de f.

❻ Montrer que f et f^* ont même polynôme caractéristique.

Partie II

On rappelle qu'un endomorphisme normal f d'un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$ est un endomorphisme tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

❶ Soit f un endomorphisme normal, montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels, $P(f)$ est normal.

❷ Montrer que si f est un endomorphisme normal, alors f et f^* ont les mêmes sous espaces propres.

❸ Montrer que les sous espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.

❹ Montrer que si F est un sous espace de E stable par f alors F est également stable par f^*. On pourra raisonner matriciellement.

❺ Montrer que si F est un sous espace de E stable par f alors F° est stable par f et f^*.

❻ En déduire que les restrictions de f à F et à F° sont deux endomorphismes normaux.

Partie III

❶ Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels. A quelle(s) condition(s) A est la matrice associée à un endomorphisme normal ?

❷ Soit f un endomorphisme normal de $(E,\langle .,.\rangle)$, montrer qu'il existe une base orthonormée de $(E,\langle .,.\rangle)$ telle que f admet comme matrice dans E la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_s \end{pmatrix}$ où chaque bloc diagonal A_i s'écrit $\lambda_i I_2$ ou $\rho_i\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$. On pourra raisonner par récurrence.

❸ En déduire la forme générale du polynôme caractéristique d'un endomorphisme normal.

❹ Inversement, si A est la matrice d'un endomorphisme normal telle que son polynôme caractéristique soit $\chi_A(T)=(T-2)^2(T-1)(T^2+T+1)^2(T^2+1)$, donner la matrice diagonale par blocs à laquelle A est orthogonalement semblable.