CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

1. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Notons E_{ij} l'endomorphisme de E défini par :

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$$

avec δ_{jk} symbole de Kronecker. Alors $\{E_{ij}\}_{\{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}}$ forme une base de $\mathcal{L}(E)$.
On a :

$$\phi_u(E_{ij})(e_k) = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{jk} e_i = (\lambda_i - \lambda_k) E_{ij} e_k.$$

Donc u diagonalisable $\Rightarrow \phi_u$ diagonalisable.

2. Supposons ϕ_u diagonalisable et $\mathbb{K}$ algébriquement clos. u admet donc un vecteur propre :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \exists x (\neq 0_E) \in E, u(x) = \lambda x.$$

L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans E qui à tout endomorphosme f associe $f(x)$ est linéaire surjective car $x \neq 0_E$. Cette application transforme donc une base de $\mathcal{L}(E)$ en une famille génératrice de E. Cette famille génératrice contient une sous-famille qui forme une base de E. par hypothèse, $\mathcal{L}(E)$ admet une base de vecteurs propres pour ϕ_u, il existe donc une famille libre $(f_1, ..., f_n)$ de vecteurs propres de ϕ_u telle que : $(f_1(x), ..., f_n(x))$ forme une base de E.
$\forall i \in \{1, ..., n\}, \phi_u(f_i) = \lambda_i f_i = u f_i - f_i u$ donc

$$\lambda_i f_i(x) = u(f_i(x)) - \lambda f_i(x)$$

donc

$$u(f_i(x)) = (\lambda_i + \lambda) f_i(x).$$

$(f_1(x), ..., f_n(x))$ forme donc une base de vecteurs propres pour u. Donc u est diagonalisable.

Exercice 2

1. En appliquant la première propriété de q à $x = y = 0$, on trouve $q(0) = 0$ et en l'appliquant à $x = 0, y \in E$ on trouve $q(y) = q(-y)$. On en déduit que f est symétrique.
   Soit $(x, x', y) \in E^3$,
   $$f(x+x',y) - f(x,y) - f(x',y) = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}[q(x'+2y) - q(x'-2y)] - q(x'+y) + q(x'-y)].$$
   Ce résultat est indépendant de x donc :
   $$f(x+x',y) - f(x,y) - f(x',y) = f(x',y) - f(0,y) - f(x',y) = 0.$$
   Par un argument classique, on en déduit que f est $\mathbb{Q}$-linéaire par rapport à sa première variable.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (x,y) \in E^2$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
   $$\lambda \to f(\lambda x, y) - \lambda f(x,y)$$
   est nulle sur $\mathbb{Q}$ et continue d'après la seconde propriété de q. Elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.
   En conclusion, f est une forme bilinéaire symétrique et
   $$x \to \frac{1}{4}q(2x) = q(x)$$
   est une forme quadratique.

2. $$\| x + (t+h)y \|^2 + \| x + (t-h)y \|^2 = 2 \| x + ty \|^2 + 2h^2 \| y \|^2 .$$
   Donc $t \to \| x + ty \|^2$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on applique le résultat de la question précédente avec $q(x) = \| x \|^2$.

Problème

Partie I

1. Toute matrice carrée peut s'écrire sous la forme demandée, il suffit pour cela de prendre

$$M' = \frac{1}{2}(M +^t M), M'' = \frac{1}{2}(M -^t M).$$

On vérifie aisément que M' est symétrique et M'' est antisymétrique.
En outre, si on cherche les matrices M' et M'' quie vérifient $M = M' + M''$, en transposant, on obtient

$$^tM = M' - M''$$

et les relation

$$M = M' + M'', ^t M = M' - M''$$

donnent une solution unique.

Fomesoutra.com
ça soutra !

2. Déjà, la matrice nulle est magique.
Soit $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que si $\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, 3,$

$$l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} = l_{1j} + l_{2j} + l_{3j} = l_{11} + l_{22} + l_{33} = l_{31} + l_{22} + l_{13}$$

et

$$n_{i1} + n_{i2} + n_{i3} = n_{1j} + n_{2j} + n_{3j} = n_{11} + n_{22} + n_{33} = n_{31} + n_{22} + n_{13}$$

alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $l_{i1} + l_{i2} + l_{i3} + \lambda(n_{i1} + n_{i2} + n_{i3}) = l_{1j} + l_{2j} + l_{3j} + \lambda(n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) = l_{11} + l_{22} + l_{33} + \lambda(n_{11} + n_{22} + n_{33}) = l_{31} + l_{22} + l_{13} + \lambda(n_{31} + n_{22} + n_{13})$.
L'ensemble des matrices magiques est donc un sous - espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.

3. La transposée d'une matrice magique est magique. En effet, les diagonales restent inchangées et comme la transposition revient à permuter ligne et colonne d'une matrice, les égalités entre somme des éléments des lignes et somme des éléments des colonnes est toujours valable.

4. Des égalités et d'après la question précédente, $M' = \frac{1}{2}(M +^t M)$ et $M'' = \frac{1}{2}(M -^t M)$, il est immédiat que si M est magique, M' et M'' le sont aussi.

5. Vérification immédiate

6. Toute matrice antisymétrique d'ordre 3 s'écrit $M'' = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. La vérification des matrices magiques d'ordre 3 conduit au système suivant :

$$-\gamma + \beta = -\alpha + \gamma = -\beta + \alpha = \gamma - \beta = \alpha - \gamma = \beta - \alpha = 0.$$

De là, on en déduit que

$$M'' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Traitons le cas où la somme des éléments diagonaux est nulle. Dans ce cas, les matrices magiques symétriques sont de la forme :

$$M' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fomesoutra.com ça soutra !

On traite le cas où la somme des termes diagonaux n'est pas nulle et vaut s en ajoutant à chacun des 9 éléments de la matrice trouvée $\frac{s}{3}$. Ceci fournit l'écriture :

$$M' = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Ainsi, comme toute matrice peut s'écrire comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique, toute matrice magique s'écrit de la forme :

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit,

$$M = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)A - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)B + \nu C = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

On en déduit ainsi que A, B, C est une famille génératrice de l'espace des matrices magiques. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est libre, ce qui est immédiat. La dimension est donc 3.

Partie II

Fomesoutra.com ça soutra !

1.

$$A^2 = B^2 = AC = CA = BC = CB = 0,$$
$$C^2 = 3C,$$

2.

$$AB + BA = 12I - 4C.$$

3. $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(\lambda A + \mu B + \nu C)$ peut s'écrire sous la forme

$$3\gamma\nu C + \begin{pmatrix} 2\beta\lambda + 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda - 6\alpha\mu \\ -4\beta\lambda & -8\beta\lambda & -4\beta\lambda \\ 2\beta\lambda - 6\alpha\mu & -4\beta\lambda & 2\beta\lambda + 6\alpha\mu \end{pmatrix}$$

Ce produit est magique si et seulement si $\beta\lambda$ et $\alpha\mu$ sont nuls.