

ECOLE NATIONALE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose que E est de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et ϕ_u l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à tout endomorphisme v de $\mathcal{L}(E)$ associe

$$\phi_u(v) = uv - vu.$$

1. Montrer que si u est diagonalisable alors ϕ_u est diagonalisable.
2. Prouver la réciproque si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.



Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et q une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, q(x + y) + q(x - y) = 2q(x) + 2q(y)$$

et

$\forall (x, y) \in E^2$ l'application $t \rightarrow q(x + ty)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue .

1. Montrer que l'application f de E^2 dans $\mathbb{R}$:

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{1}{4}[q(x + y) - q(x - y)]$$

est bilinéaire symétrique. Que peut-on dire de q ?

2. On suppose que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel normé tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Montrer que la norme est euclidienne (c'est-à-dire associée à un produit scalaire).

Problème

Dans tout le problème, on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ des matrices $(3, 3)$ à coefficients réels :



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout (i, j) . Elle sera dite **antisymétrique** si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout (i, j) . Elle sera dite **magique** si $\forall i = 1, 2, 3, \forall j = 1, 2, 3,$

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{31} + a_{22} + a_{13}.$$

On donne les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = {}^t A; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A .

Partie I

1. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique M' et d'une matrice antisymétrique M'' et que cette décomposition est unique.

2. Montrer que l'ensemble des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que la transposée d'une matrice magique est magique.
4. Montrer que si M est magique, M' et M'' le sont aussi.
5. Vérifier que A, B et C sont magiques.
6. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques.
7. Construire toutes les matrices magiques symétriques.
8. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel des matrices magiques de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$. Vérifier que A, B, C est une base du sous-espace vectoriel des matrices magiques.

Partie II



1. Calculer $A^2, B^2, C^2, AC, BC, CA, CB$.
2. Montrer que $AB + BA$ est une combinaison linéaire de C et de I_3 où I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.
3. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices magiques soit magique ?
4. En déduire toutes les matrices magiques produits de deux matrices magiques.
5. Montrer que le produit d'une matrice magique par une combinaison linéaire de C et de I_3 est magique.
6. Montrer que les puissances paires des matrices magiques ne sont pas magiques (sauf dans un cas particulier que l'on précisera), mais que les puissances impaires d'une matrice magique sont toujours magiques.
7. Quand une matrice magique est-elle inversible ? Quelle est alors son inverse ? Est-elle magique ? Peut-on étendre aux exposants négatifs le résultat obtenu à la question précédente sur les exposants positifs ?