

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE B Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N°1

Soit la matrice A définie par :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer les valeurs propres de A .
(b) Déterminer les espaces propres de A .
(c) En déduire que A est diagonalisable. A est-elle inversible?
2. (a) Exhiber une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
(b) Calculer P^{-1} .
3. (a) Soit n un entier strictement positif. Montrer que A et A^n sont diagonalisables dans la même base.
(b) Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(c) Calculer A^{-1} .

EXERCICE N°2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit x un vecteur de E . Montrer que $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est une famille libre de E si et seulement si $f^{p-1}(x) \neq 0$.
2. En déduire que $p \leq n$.
3. Établir que $\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^{p-1} \subset \text{Ker } f^p = E$.
4. Démontrer que toutes les inclusions précédentes sont strictes.

PROBLÈME



Partie I

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On définit la trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Montrer que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Établir que $\text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A)$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où ${}^t A$ désigne la transposée de A .
3. (a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
(b) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A {}^t A - {}^t A A = I$, où I désigne la matrice identité. (On pourra calculer $\text{tr}(A {}^t A - {}^t A A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Partie II

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (applications linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application :

$$\varphi_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \text{tr}(AX).$$

1. Montrer que φ_A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.

2. On définit maintenant l'application :

$$f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \varphi_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*.$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Montrer que f est injective. (On pourra penser à utiliser les matrices E_{lm} dont tous les éléments sont nuls hormis celui situé à l'intersection de la l -ième ligne et de la m -ième colonne qui est égal à 1).

(c) Quelles sont les dimensions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$?



(d) En déduire que l'application f est bijective.

3. (a) Soit E un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\dim E = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1$). Prouver qu'il existe φ_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ telle que $E = \text{Ker } \varphi_0$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice non nulle A_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A_0 M) = 0\}.$$