

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE N°1



f est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie, qui vérifie $f \circ f = f$.

1. Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. x étant dans l'image de f , il existe donc y dans E tel que $x = f(y)$. Mais x est également dans le noyau, donc $f(x) = 0$. Puisque $f^2 = f$, on a donc :

$$0 = f(x) = f(f(y)) = f(y) = x.$$

On en déduit donc que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$. Le théorème du rang nous indique que :

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E,$$

on a donc bien :

$$\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E.$$

2.

$$\begin{aligned} x \in \text{Im } f &\iff \exists y, f(y) = x \\ &\iff f(x) = x \quad (\text{car } f \circ f = f) \\ &\iff x \in \text{Ker } (f - \text{Id}). \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, $\text{Ker } (f - \text{Id}) \oplus \text{Ker } f = E$. Comme E est somme directe des sous-espaces propres de f , f est donc diagonalisable.

EXERCICE N°2

q est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$.

1. q est une forme quadratique en tant que polynôme homogène de degré 2.
2. La matrice du produit scalaire associé à q est :



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On peut écrire $q(x, y, z) = 2\left(x + \frac{y}{2} + z\right)^2 + 3\frac{y^2}{2} + 3z^2$. On voit alors que q est bien définie positive.

PROBLÈME

Partie I. f est un endomorphisme quelconque de E .

1. Soient g_1 et g_2 dans $\mathcal{C}(f)$ et soient λ et μ deux complexes. On a :

$$f \circ (\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda f \circ g_1 + \mu f \circ g_2 = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f = (\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f,$$

ce qui prouve que $\mathcal{C}(f)$ est bien un espace vectoriel.

2. Soit g dans $\mathcal{P}(f)$. g s'écrit donc sous la forme :

$$g = a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

On a bien :

$$\begin{aligned} g \circ f &= (a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n) \circ f \\ &= a_0 f + a_1 f^2 + \cdots + a_n f^{n+1} \\ &= f \circ (a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_n f^n) \\ &= f \circ g. \end{aligned}$$

3. Si $f = 0$, il est clair que $\mathcal{P}(f) = \{0\}$ alors que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.
4. Supposons qu'il existe un complexe λ tel que $f = \lambda \text{Id}$. Alors $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$, donc $\dim \mathcal{C}(f) = n^2 \geq 2$. Sinon, f et Id forment une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$\dim \mathcal{C}(f) \geq \dim \mathcal{P}(f) \geq \dim (\text{Vect} (\text{Id}, f)) \geq 2.$$

Partie II. f est maintenant un endomorphisme de E tel que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\text{Ker } f \neq \{0\}$.

(a) Si f n'est pas l'endomorphisme nul, alors il existe un vecteur y tel que $f(y) \neq 0$. Mais, puisque $\text{Ker } f \neq \{0\}$, il existe x non nul dans $\text{Ker } f$, d'où le résultat.

(b) Si $\lambda x + \mu y = 0$, alors $f(\lambda x + \mu y) = 0$. Mais $f(x) = 0$, donc :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \mu f(y).$$

D'où $\mu f(y) = 0$, ce qui donne $\mu = 0$ car $f(y) \neq 0$.

On a alors $\lambda x = 0$, donc $\lambda = 0$ car x est non nul. $\{x, y\}$ est donc bien une famille libre.

(c) Le théorème de la base incomplète nous permet maintenant d'affirmer qu'il existe des vecteurs $e_3, \dots, e_n$ tels que $(x, y, e_3, \dots, e_n)$ forment une base de E . Soit alors l'endomorphisme g défini par :

$$g(x) = y \quad \text{et} \quad g(y) = g(e_3) = \dots = g(e_n) = 0.$$

(d) On a alors :

$$f \circ g(x) = f(y) \neq 0 \quad (\text{par hypothèse}) \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(0) = 0.$$

(e) Ce dernier résultat est contradictoire avec le fait que g et f commutent donc f est forcément l'endomorphisme nul si son noyau est non réduit à $\{0\}$.

2. On suppose maintenant que $\text{Ker } f = \{0\}$.

(a) Soit x quelconque. Si $\{x, f(x)\}$ est une famille libre, le théorème de la base incomplète nous dit que l'on peut trouver des vecteurs $e_3, \dots, e_n$ tels que $(x, f(x), e_3, \dots, e_n)$ soit une base de E . On définit alors l'endomorphisme g par :

$$g(x) = x \quad \text{et} \quad g(f(x)) = g(e_3) = \dots = g(e_n) = 0.$$

On a donc :

$$f \circ g(x) = f(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = 0.$$

Cela contredit donc le fait que f et g commutent. Donc x et $f(x)$ sont liés quel que soit x .

(b) Si $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est une famille liée. Donc il existe un complexe $\lambda(x)$ tel que $f(x) = \lambda(x)x$. Si x est nul, le résultat est évident.

(c) D'après la question précédente :

$$f(x) = \lambda(x)x \quad \text{et} \quad f(\mu x) = \lambda(\mu x)(\mu x).$$

Mais $f(\mu x) = \mu f(x)$, d'où $\mu f(x) = \lambda(\mu x)\mu x$. μ étant non nul, on a donc $f(x) = \lambda(\mu x)x$. Comme on avait déjà $f(x) = \lambda(x)x$ et que x est non nul, on a donc bien $\lambda(\mu x) = \lambda(x)$.

(d) Soit x et y deux vecteurs libres. On écrit $f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$. Mais $f(x + y) = \lambda(x + y)(x + y)$. En égalant les deux expressions, on trouve :

$$\lambda(x)x + \lambda(y)y = \lambda(x + y)(x + y),$$

soit encore :

$$[\lambda(x) - \lambda(x + y)]x + [\lambda(y) - \lambda(x + y)]y = 0.$$

x et y étant libres, on a forcément $\lambda(x) - \lambda(x + y) = \lambda(y) - \lambda(x + y) = 0$ ce qui prouve finalement que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

(e) On déduit des deux questions précédentes que, pour tous x et y , $\lambda(x) = \lambda(y)$. Donc pour tout x , $\lambda(x) = \lambda(0) = \lambda$ indépendant de x .

3. On a donc prouvé que si $\text{Ker } f = \{0\}$, alors il existe λ tel que, quel que soit x , $f(x) = \lambda x$. Si $\text{Ker } f \neq \{0\}$, alors $f = 0$, qui est sous la même forme que précédemment avec $\lambda = 0$. Dans tous les cas, si f commute avec tous les endomorphismes, alors f est une homothétie (i.e. $f(x) = \lambda x$). A l'inverse, il est clair que si $f(x) = \lambda x$ alors f commute avec tous les endomorphismes.

Partie III. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E . On suppose que f possède p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ respectivement d'ordre de multiplicité $n_1, \dots, n_p$.

1. On considère g dans $\mathcal{C}(f)$. Soit x dans $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ pour un i dans $\{1, \dots, p\}$. Comme f et g commutent, on peut écrire :

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x).$$

Donc $g(x)$ est dans $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$, ce qui signifie que $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ est stable par g . Donc tous les espaces propres de f sont bien stables par g .

2. Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ_i . Par hypothèse, $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ est stable par g . $g(x)$ est donc dans $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$, ce qui signifie $f \circ g(x) = \lambda_i g(x)$. D'autre part, $g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$. Donc, pour tout vecteur propre x , on a $g \circ f(x) = f \circ g(x)$.

f étant diagonalisable, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f . D'après ce qui précède :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i).$$

$f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base, elles sont donc égales.

3. On vient de montrer que g commute avec f si et seulement si g conserve tous les espaces $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$. On a donc :

$$\dim \mathcal{C}(f) = \sum_{i=1}^p \dim \mathcal{L}(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})) = \sum_{i=1}^p n_i^2,$$

où $\mathcal{L}(\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}))$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$.