ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f une application linéaire de E dans E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, où Id désigne l'application identité de E.

3. Déduire de tout ce qui précède que f est diagonalisable.

EXERCICE N^{0}2

Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4xz + 2yz.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Quelle est la matrice associée du produit scalaire associé à q?

3. Montrer que q est définie positive.

PROBLÈME

Définitions et notations :

• E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$.
• On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E.
• On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.
• Pour un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$, on appelle **commutant de** f, l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f\}.$$

• On désigne par $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
• Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et f un élément de $\mathcal{L}(E)$, on définit l'endomorphisme $P(f)$ par :

$$P(f) = a_0 \,\mathrm{Id} + a_1\, f + \cdots + a_n\, f^n,$$

où Id désigne l'application identité de E et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

• On notera $\mathcal{P}(f) = \{P(f),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$.

Partie I. Soit f un endomorphisme quelconque de E.

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{C}(f)$.

3. Montrer, par un exemple très simple, que l'inclusion précédente peut être stricte.

4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(f) \geq 2$.

Partie II. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$. L'objectif de cette partie est de trouver la forme de f.

1. Supposons que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. On veut montrer que f est l'endomorphisme nul.

   (a) Montrer que si f n'est pas l'endomorphisme nul, alors on peut trouver deux vecteurs non nuls x et y tels que :

   $$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(y) \neq 0.$$

   (b) Montrer que (x, y) est un système libre.

   (c) Montrer que l'on peut construire g dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $g(x) = y$.

(d) Montrer que f et g ne commutent pas.

(e) Conclure que si $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, alors f est forcément l'endomorphisme nul.

2. Supposons dorénavant que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. On veut montrer que f est nécessairement une homothétie.

   (a) Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que si $(x, f(x))$ est une famille libre, on peut construire un endomorphisme g qui ne commute pas avec f.

   (b) En déduire que pour tout vecteur non nul x de E, il existe $\lambda(x)$ dans $\mathbb{C}$ tel que $f(x) = \lambda(x)\, x$.

   (c) Soit x un vecteur non nul de E et soit μ dans $\mathbb{C}^*$. En écrivant $f(\mu x)$ de deux façons, montrer que $\lambda(\mu x) = \lambda(x)$.

   (d) Soit x et y deux vecteurs libres. En écrivant $f(x+y)$ de deux façons, montrer que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

   (e) En déduire que f est nécessairement une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda\ \mathrm{Id}$, où Id est l'application identité de E.

3. Donner finalement tous les endomorphismes f de E qui vérifient $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

Partie III. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E. On suppose que f possède p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ respectivement d'ordre de multiplicité $n_1, \cdots, n_p$.

1. Soit g appartenant à $\mathcal{C}(f)$. Montrer que les espaces propres de f sont stables par g.

2. Réciproquement, montrer que si g conserve tous les espaces propres de f alors g est dans $\mathcal{C}(f)$.

   Indication : on montrera que, si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de f, alors pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$, $f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$.

3. En déduire que $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.