AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B OPTION Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUE

Problème 1

Préliminaire :

$< .,. >_D$ est clairement bilinéaire symétrique. Comme D est définie positive toutes ses valeurs propres sont positives et donc

$$||Y||_D =< Y, Y >_D \geq 0,$$

nulle ssi $Y = 0$. L'inégalité est une conséquence directe de Cauchy-Schwartz. On peut la vérifier en posant $D = diag(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si on pose $Y = (y_1, ..., y_n)^*$ et $Z = (z_1, ..., z_n)^*$ l'inégalité devient

$$< Y, Z >_D = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i z_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} y_i)(\sqrt{\lambda_i} z_i) \right)$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} y_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} z_i)^2 \right)^{1/2} = \|Y\|_D \|Z\|_D$$

par Cauchy-Schwarz.

1) a) Soit A et B dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Z = AX$, il suffit de prouver

$$Y^* BZ \; Z^* BY \leq (Z^* BZ)(Y^* BY).$$

On notera que les deux membres de cette inégalité sont réels.

B, étant dans $SDP_n(\mathbb{R})$, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, de valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ strictement positive. On pose $D = diag(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il existe donc O dans $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales tel que

$$B = O^* DO$$

Si l'on pose $Z_1 = OZ$ et $Y_1 = OY$ il suffit donc de montrer que

$$(Y_1^* DZ_1)^2 \leq (Z_1^* DZ_1)(Y_1^* DY_1),$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du préliminaire pour le produit scalaire $< Y_1, Z_1 >_D = Y_1^* DZ_1$.

b) On note que $X^* AX$ et $X^* ABAX$ sont réels et que les matrices XX^* et $BAXX^* AB$ sont des matrices symétriques de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ donc C est une matrice symétrique. Pour montrer que C est définie positive, il suffit de montrer que pour $Y \neq 0$, $Y^* CY > 0$. D'après a) on a

$$(1) \qquad (Y^* BAXX^* ABY) \leq (X^* ABAX)(Y^* BY)$$

donc

$$\begin{aligned} Y^*BY + \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} - \frac{Y^*BAXX^*ABY}{X^*ABAX} &\geq Y^*BY + \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} - Y^*BY^* \\ &= \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} \geq 0. \end{aligned}$$

C est donc positive. L'égalité à 0 impose l'égalité dans (1) ainsi que $Y^*XX^*Y = 0$ donc d'après ce qui précède que $0 = (Z_1^* DZ_1)(Y_1^* DY_1)$. Comme D est définie positive, on a $||Z_1||_D > 0$ et donc nécessairement $(Y_1^* DY_1) = 0$ d'où $Y_1^* = 0$ et donc A étant définie positive (donc étant inversible) $Y = 0$. C est donc définie positive.

2) En utilisant le résultat précédent, on obtient immédiatement par récurrence que chaque H_{k+1} est dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $X_k \neq 0$.

On pose $H(k)$:$\forall\ j \in \{0, ..., k\}$, $H_{k+1}AX_j = X_j$ et $X_{k+1}^* AX_j = 0$.

On vérifie d'abord $H(0)$ qui se ramène à $H_1AX_0 = X_0$ et $X_1^*AX_0$.

Or on a par définition avec $H_0 = I_n$

$$\begin{aligned} H_1AX_0 &= (I_n + \frac{X_0X_0^*}{X_0^*AX_0} - \frac{AX_0X_0^*A}{X_0^*AAX_0})AX_0 \\ &= AX_0 + X_0\frac{X_0^*AX_0}{X_0^*AX_0} - \frac{AX_0X_0^*AAX_0}{X_0^*AAX_0} \\ &= AX_0 + X_0 - AX_0 = X_0. \end{aligned}$$

Par ailleurs $X_1^*AX_0 = 0$ signifie $Y_1^*H_1AX_0 = 0 \iff Y_1^*X_0 = 0$ (d'après l'égalité précédente) et donc comme c'est un scalaire

$$X_0^*Y_1 = 0.$$

Supposons maintenant que $H(k-1)$ est vérifiée et montrons $H(k)$.

Tout d'abord en raisonnant comme pour $H(0)$ on a, en utilisant la récurrence,

$$\begin{aligned} H_{k+1}AX_j &= (H_k + \frac{X_jX_j^*}{X_j^*AX_j} - \frac{H_kAX_jX_j^*A}{X_j^*AAX_j})AX_j \\ &= H_kAX_j + X_j - AX_j \\ &= X_j \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq j \leq k-1$. Pour $j = k$, on a aussi cette identité directement.

Il suffit donc de montrer maintenant que $X_{k+1}^*AX_j = 0$. Mais on a

$$X_{k+1}^*AX_j = Y_{k+1}^*(H_{k+1}AX_j) = Y_{k+1}^*X_j = 0$$

par définition de Y_{k+1}, d'où $H(k)$.

3) Pour tout $(j,k) \in \{0, ..., n-1\}^2,\ j \neq k,$ 2) implique que $X_k^*AX_j = 0$, soit, A étant définie positive, les vecteurs $X_k^*,\ k = 0, ..., n-1$ sont deux à deux orthogonaux pour le produits scalaires $<,>_A$. Comme ils sont non nuls et au nombre de n, ils forment donc une base orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Donc, tout X dans $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique

$$X = \sum_{j=0}^{n-1} a_jX_j.$$

On a alors en utilisant la relation $H_n A X_j = X_j,\ j = 1, ..., n-1$

$$H_n AX = \sum_{j=1}^{n-1} a_j H_n AX_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_j X_j = X$$

donc

$$H_n A = I_n$$

A étant définie positive, ceci implique que $H_n = A^{-1}$.

Problème 2

1) $M_{n,n}(\mathbb{C})$ est bien un espace vectoriel...

On a clairement la linéarité en A et l'antilinéarité en B. Pour$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ A, B,\ C$ dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} &< \lambda A + \mu C, B >= tr((\lambda A + \mu C)B^*) \\ &= \lambda tr(AB^*) + \mu tr(CB^*) = \lambda < A, B > + \mu < C, B > \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &< A, \lambda B + \mu C >= tr(A(\lambda B + \mu C)^*) \\ &= tr(A(\overline{\lambda} B^* + \overline{\mu} C^*) = \overline{\lambda} tr(AB^*) + \overline{\mu} tr(A, C^*) \\ &= \overline{\lambda} < A, B > + \overline{\mu} < A, C > . \end{aligned}$$

Donc $< .,. >$ est sesquilinéaire et l'on a

$$\begin{aligned} &< A, B >= tr(AB^*) = tr((BA^*)^*) \\ &= \overline{tr(BA^*)} = \overline{< B, A >}, \end{aligned}$$

donc $< .,. >$ est une forme hermitienne sur $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Et comme pour tout $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$\begin{aligned} &< A, A^* >= tr(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \overline{a_{i,j}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \ \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c'est un produit scalaire hermitien.

Soit la matrice $E_{i,j} = (\delta_{k,l})_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,n}}$ avec $\delta_{k,l} = 0$ si $1 \leq (k,l) \neq (i,j)$ et $\delta_{k,l} = 1$ si $(k,l) = (i,j)$. Les matrices $(E_{i,j})$ pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$ sont au nombre de n^2.

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} &< E_{i,j}, E_{l,m} >= 0 \text{ si } (i,j) \neq (l,m) \\ &< E_{i,j}, E_{i,j} >= \delta_{i,j}^2 = 1 \end{aligned}$$

donc les $(E_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ forment une base orthonormée de $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

2) C'est évident car pour tout A, B dans $M_{n,n}(\mathbb{C}),\ tr(AB) = tr(BA)$.

On a donc directement

$$\begin{aligned}||UA||^2 &= tr(UAA^*U^*) = tr(AA^*UU^*)\\ &= tr(AA^*) = ||A||^2,\end{aligned}$$

$$||AU||^2 = tr(AUU^*A) = tr(AA^*) = ||A||^2.$$

3) Posons $A = diag(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. On a alors

$$AB-BA = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2)b_{1,2} & (\lambda_1-\lambda_3)b_{1,3} & & (\lambda_1-\lambda_n)b_{1,n} \\ (\lambda_2-\lambda_1)b_{2,1} & 0 & (\lambda_2-\lambda_3)b_{2,3} & & (\lambda_2-\lambda_n)b_{1,2} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ (\lambda_n-\lambda_1)b_{n,1} & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$||AB-BA||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\lambda_i-\lambda_j|^2 |b_{i,j}|^2.$$

On a par ailleurs

$$||A||^2 = \sum_{i=}^{n} |\lambda_i|^2 \ et ||B||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{i,j}|^2.$$

On déduit de l'inégalité $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$,

$$\begin{aligned}||AB-BA||^2 &\leq 2\sum_{i,j=1}^{n} (|\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2)|b_{i,j}|^2\\ &\leq 2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\right)|b_{i,j}|^2\\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\right)\sum_{i,j=1}^{n}|b_{i,j}|^2\\ &= 2||A||^2||B||^2\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de l'énoncé, lorsque A est diagonale.

Maintenant, si A est une matrice quelconque de $M_{n,n}(\mathbb{C})$, les théorèmes de réductions assurent l'existence d'une matrice unitaire U tel que $A = UDU^*$ avec D diagonale.

On en déduit que

$$\begin{aligned}||AB-BA|| &= ||UDU^*B - BUDU^*||\\ &= ||U(DU^*BU - U^*BUD)U^*||\end{aligned}$$

soit en utilisant 2)

$$||AB-BA|| = ||DU^*BU - U^*BUD||.$$

Si on pose $B_U = U^*BU$, on a en appliquant l'inégalité du 3,

$$||AB-BA|| \leq \sqrt{2}||D||\ ||B_U||$$

et il suffit de remarquer $||B_U|| = ||B||$ et $||A|| = ||D||$ (en appliquant 2)).

4) Par récurrence, chaque B_k est un produit de matrices unitaires donc inversible : la suite est donc bien définie.

Maintenant on a

$$\begin{aligned}||I - B_{k+1}|| &= ||I - AB_kA^{-1}B_k^{-1}|| \\ &= ||A^{-1}(AB_k - B_kA^{-1})B_k^{-1}|| \\ &= ||AB_k - B_kA|| \leq \sqrt{2}||A||\ ||B_k|| = \sqrt{2}||B_k||\end{aligned}$$

Mais on peut aussi écrire $AB_k - B_kA = (I - A)(I - B_k) - (I - B_k)(I - A)$ de sorte que l'on a également

$$\begin{aligned}||I - B_{k+1}|| &= ||(I - A)(I - B_k) - (I - B_k)(I - A)|| \\ &\leq \sqrt{2}||I - A||\ ||I - B_k||, ,\end{aligned}$$

ce qui est plus intéressant pour l'étude de la suite. En effet, comme $\sqrt{2}||I - A|| < 1$, on en déduit que la suite des $||I - B_{k+1}||$ décroît vers 0. Plus précisément si on pose $a = \sqrt{2}||I - A|| < 1$ on a

$$||I - B_{k+1}|| \leq a^{k+1}||I - B||$$

et le théorème de d'Alembert implique que $lim_{k\to\infty}||I - B_{k+1}|| = 0$ donc

$$lim_{k\to\infty}B_{k+1} = I.$$

Si A et B engendrent un sous-groupe fini de $U_n(C)$, alors les B_k sont dans ce sous-groupe fini et ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs donc la suite des B_k stationne et vaut I au bout d'un nombre fixe d'itérations.

5) On a

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ & \backslash & 0 \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ & \backslash & 0 \\ 0 & & b_n \end{pmatrix},$$

donc les $\{a_i\}$ *et* les $\{b_j\}$ sont simultanément les valeurs propres de A donc il existe σ une permutation de permettant de passer des $\{a_i\}$ aux $\{b_j\}$, c'est à dire il existe telle que $b_i = a_{\sigma(i)}$. On pose P la matrice associée à cette permutation : tous ses coefficients sont dans $\{0,1\}$. Plus précisément cette matrice est donnée par

$$P = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}},$$

où $\delta_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $\delta_{k,l} = 1$ si $k = l$. On a évidemment $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc P est dans $U_n(\mathbb{C})$. Il suffit maintenant de vérifier que $P^{-1}AP = BAB^{-1}$.

La matrice $P^{-1}AP = [c_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est donnée par

$$c_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}a_{k,l}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

donc

$$\begin{aligned}&c_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \\ &c_{i,i} = a_{\sigma(i),\sigma(i)} = a_{\sigma(i)} \text{ pour } i = j.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

6) On remarque simplement que

$$AC^{-1} - C^{-1}A = C^{-1}(CA - AC)C^{-1} = 0,$$

car $CA = AC$...

7) On écrit à nouveau

$$\begin{aligned} A(BA^{-1}B) &= A(BAB^{-1}A^{-1})A \\ &= (BAB^{-1}A^{-1})A^2 \quad \text{car } A \text{ et } BAB^{-1}A^{-1} \text{ commutent} \\ &= BAB^{-1}A. \end{aligned}$$

Donc A et $BA^{-1}B$ commutent et donc sont simultanément diagonalisables d'après le théorème de Schurr rappelé dans l'énoncé.

8) Si $||I - M|| < 2$ alors en posant $M = (m_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$

$$\begin{aligned} 4 &> ||I - M||^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |1 - m_{ii}|^2 + \sum_{i \neq j} |m_{ij}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |1 - m_{ii}|^2 + 1 - |m_{ii}|^2 , \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que la matrice M est unitaire. Mais on a

$$\begin{aligned} |1 - m_{ii}|^2 + 1 - |m_{ii}|^2 &= 1 + |m_{ii}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(m_{ii}) + 1 - |m_{ii}|^2 \\ &= 2(1 - \mathrm{Re}(m_{ii})). \end{aligned}$$

On en déduit

$$4 > 2\sum_{i=1}^{n}(1 - \mathrm{Re}(m_{ii})).$$

Mais comme

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(m_{ii}) \leq \sum_{i=1}^{n} |m_{ii}|,$$

on obtient en combinant les deux inégalités précédentes le résultat

$$\sum_{i=1}^{n} |m_{ii}| > n - 2.$$

Maintenant comme M est unitaire, chaque $|m_{ii}| \leq 1$ donc forcément $n-1$ sont non nuls (sinon on aurait $\sum_{i=1}^{n} |m_{ii}| \leq n-2$ ce qui est impossible d'après l'inégalité précédente).

9) On va essayer de montrer que A et B commutent. Pour cela, on a d'après 7) l'existence de U unitaire telle que

$$A_D = UAU^{-1} ,$$
$$B_D = U(BAB^{-1})U^{-1} ,$$

où A_D et B_D sont des matrices diagonales. On remarque par ailleurs que

$$\begin{aligned} B_D &= (UBU^{-1})(UAU)(U^{-1}B^{-1}U) \\ &= (UBU^{-1})A_D(U^{-1}B^{-1}U) \\ &= (UBU^{-1})A_D(UBU^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Comme U et B sont unitaires, UBU^{-1} est unitaire donc d'après le résultat obtenu en 5), il existe P matrice de permutation telle que

$$B_D = P^{-1}A_D P = M^{-1}A_D M,$$

en posant $M = UBU^{-1}$.

Si on pose également $B_D = diag[b_i]_{1\leq i\leq n}$, on a , d'après la première égalité, l'existence d'une permutation de $\{1,2,...,n\}$ tel que $A_D = diag[b_{\sigma(i)}]_{1\leq i\leq n}$. Par ailleurs la dernière égalité implique que, pour tout $i \in \{1,...,n\}$,

$$m_{ii}b_i = b_{\sigma(i)}m_{ii}.$$

Mais on a $||I-B|| = ||I-M|| < 2$ par hypothèse et en utilisant les résultats de 8) on sait que au moins $n-1$ éléments de la diagonales parmi les $m_{i,i}$ sont non nuls. On en déduit que la permutation σ vaut l'identité sur au moins $n-1$ composantes. DONC sur toutes les composantes (sinon elle ne serait plus bijective). On en déduit donc $P = I = M$ et

$$\begin{aligned} B_D &= A_D \\ &\Leftrightarrow UAU^{-1} = U(BAB^{-1})U^{-1} \\ &\Longleftrightarrow A = BAB^{-1} \\ &\Longleftrightarrow AB = BA. \end{aligned}$$

En conclusion A et B commutent et sont donc simultanément diagonalisables.

10) D'après 4) on peut construire une suite de la forme B_k qui converge et même stationne en I. Eliminons d'abord le cas trivial $B = I$ auquel cas A et B commutent. Il existe alors d'après 4) $k \in \mathbb{N}$ tel que $B_k \neq I$ et tel que $B_{k+1} = I$

Supposons que $k \geq 1$ alors on a d'après 4)

$$||I - B_{k-1}|| \leq a^{k-1}||I-B|| \leq ||I-B|| < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$$

Donc si on pose $C = AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1}$ on a

$$\begin{aligned} CA - AC &= (AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1})A - A(AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1}) \\ &= B_kA - AB_k = (I - AB_kA^{-1}B_k^{-1})B_kA \\ &= (I - B_{k+1})B_kA \\ &= 0 \end{aligned}$$

par définition de k.

On en déduit que A et C commutent mais d'après les résultats de 7) et 9) on en déduit que $[A, B_{k-1}] = 0$ ce qui implique $B_k = I$, ce qui est contraire à la définition de k.

On en déduit donc que forcément $k = 1$ ce qui signifie $B_1 = I$ soit $AB = BA$.

11) Tout élément de $V_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme d'un produit fini de la forme

$$A_1A_2....A_p$$

avec $||I - A_j|| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $j = 1, ..p$. Si on prend deux matrices quelconques intervenant dans de telles décompositions, elles engendrent un sous-groupe fini par hypothèse donc d'après 10) elles commutent. On en déduit de manière itérative que toutes les matrice intervenant dans la décomposition des éléments du groupe commutent et donc que tout élément commute.