ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

$2^{ème}$ **COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**
(Durée de l'épreuve : 3 HEURES)

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1 : **L'Algorithme de Fletcher-Powell**

On note $M_{n,k}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices n lignes, k colonnes sur $\mathbb{R}$,
$SDP_n(\mathbb{R})$ le sous ensemble de $M_{n,n}(\mathbb{R})$, des matrices symétriques, définies positives.
Y^* désigne la transposée de Y, I_n la matrice identité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Préliminaire : Soit D une matrice de $SDP_n(\mathbb{R})$ diagonale. On pose pour Y et Z dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$< Y, Z >_D = Y^* DZ.$$

Montrer que $< .,. >_D$ est un produit scalaire de norme associée $||.||_D$ et montrer l'inégalité

$$< Y, Z >_D \leq ||Y||_D ||Z||_D.$$

1) Soit A et B dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que pour tout Y dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$Y^* BAXX^* ABY \leq (X^* ABAX)(Y^* BY).$$

b) On pose

$$C = B + \frac{XX^*}{X^*AX} - \frac{BAXX^*AB}{X^*ABAX}.$$

Montrer que $C \in SDP_n(\mathbb{R})$.

2) Soit maintenant A dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $H_0 = I_n$, X_0 dans $M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$. On définit par induction

$$H_{k+1} = H_k + \frac{X_k X_k^*}{X_k^* A X_k} - \frac{H_k A X_k X_k^* A H_k}{X_k^* A H_k A X_k}$$

et

$$X_{k+1} = H_{k+1} Y_{k+1},$$

où Y_{k+1} est tel que $Y_{k+1} \neq 0$ et vérifie $X_j^* Y_{k+1} = 0$ pour $0 \leq j \leq k$, pour $k = 0, ..., n-1$ (c'est à dire Y_{k+1} est un vecteur orthogonal aux X_j, $0 \leq j \leq k$).
Montrer (par récurrence sur k) que pour tout $j \in \{0, ..., k\}$, $H_{k+1} A X_j = X_j$ et $X_{k+1}^* A X_j = 0$.

3) En déduire que $H_n = A^{-1}$.

Problème 2 : **Sur les sous-groupes des matrices unitaires.**

Soit $M_{n,n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à valeurs sur $\mathbb{C}$, muni de produit scalaire

$$< A, B >= tr(AB^*),$$

où $B^* = \overline{B}^t$ (conjuguée de la transposée). On note I la matrice identité, 0 la matrice nulle. On dit que deux matrices A et B commutent si l'on a

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

1) Montrer que $M_{n,n}(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel hermitien, de norme hermitienne

$$||A|| = \sqrt{tr(AA^*)}$$

En donner une base orthonormée.

2) Soit $U_n(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices unitaires (c'est à dire telles que $UU^* = I$).
Montrer que si $U \in U_n(\mathbb{C})$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ on a

$$||UA|| = ||AU|| = ||A||.$$

3) Soit A une matrice diagonale et B dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$, montrer que

$$||AB - BA|| \leq \sqrt{2}||A||\ ||B||$$

En déduire que ce résultat est vrai pour toute matrice A de $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

4) Soient A et B dans $U_n(\mathbb{C})$ telles que $||I - A|| < 1/\sqrt{2}$. On considère la suite définie par

$$B_0 = B$$

$$B_{k+1} = AB_kA^{-1}B_k^{-1}$$

Montrer que cette suite est bien définie et que l'on a

$$||I - B_{k+1}|| \leq \sqrt{2}||B_k||$$

et

$$||I - B_{k+1}|| \leq \sqrt{2}||I - A||\ ||I - B_k||.$$

En déduire la limite de la suite B_k quand $k \to \infty$.
Que peut-on dire de la suite B_k, si A et B engendrent un sous-groupe fini de $U_n(\mathbb{C})$.

On suppose pour le reste du problème que A et B sont dans $U_n(\mathbb{C})$. On rappelle le résultat suivant : si $[A, B] = 0$ alors A et B sont diagonalisables simultanément (c'est à dire il existe U dans $U_n(\mathbb{C})$ tel que UAU^{-1} et UBU^{-1} soient diagonales).

5) Montrer que si A et $AB^{-1}A$ sont diagonales alors il existe une matrice V de $U_{n,n}(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\{0,1\}$ telle que

$$BAB^{-1} = V^{-1}AV.$$

6) Montrer que si C est inversible $[A, C] = 0$ implique $[A, C^{-1}] = 0$

7) **On suppose désormais dans toute la suite que** $[A, ABA^{-1}B^{-1}] = 0$. Montrer que A et BAB^{-1} sont diagonalisables simultanément.

8) Montrer que si M est une matrice unitaire de terme générique $m_{i,j}$ telle que $||I-M|| < 2$ alors $\sum_{i=1}^{n} |m_{ii}| > n-2$. Montrer que au moins $(n-1)$ termes de sa diagonale sont non nuls.

9) Déduire de tout ce qui précède que si $||I-B|| < 2$ alors A et B sont diagonalisables simultanément.

10) Soit $V_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini de $U_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout élément A et B de $V_n(\mathbb{C})$ tels que

$$||I-A|| < 1/\sqrt{2} \text{ et } ||I-B|| < 1/\sqrt{2},$$

on a $[A,B]=0$.

11) Déduire de ce qui précède le théorème suivant :

Si $V_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$ engendré par des éléments A tels que $||I-A|| < 1/\sqrt{2}$, et si tout sous-groupe de $V_n(\mathbb{C})$ à deux générateurs est fini, alors $V_n(\mathbb{C})$ est abélien (commutatif).