AVRIL 2005

CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B OPTION Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUE

Exercice 1

Préliminaire

Si $x \neq 0$, on a donc par hypothèse l'existence de $\lambda_x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda_x f(x)$. On veut montrer que $\lambda_x = \lambda$ est constant.

Posons $y = \alpha x$ alors $f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$

donc $\lambda_x = \lambda_y$, est constant sur chaque droite.

Soit maintenant$(x, y) \neq 0$, libre on a

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

comme(x, y) libre l'unicité de la décomposition implique $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Donc en appliquant ces deux résultats, pour tout $x \neq 0$, s'écrivant sur une base $e_1, ..., e_p$, $x = \sum_i^p \alpha_i e_i$

$$\lambda_x = \lambda_{\alpha_i e_i} = \lambda_{e_i} \text{ pour tout } i.$$

a) C'est un espace de dimension n^2 (car en bijection avec $\mathbb{R}^{n^2}$). La base canonique est formée des matrice $e_{ij} = [\delta_{kl}(i,j)]_{\substack{k=1,...,n \\ l=1,...,n}}$ avec

$$\delta_{kl}(i,j) = 0 \ \Leftrightarrow (k,l) = (i,j).$$

Soit C qui commute avec tout élément de $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$ (on dit que C appartient au centre de E). Montrons que C est une homothétie. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que (x_0, Cx_0) est libre, donc il existe B projecteur sur l'espace engendré par Cx_0 tel que $BCx_0 = Cx_0$ et $Bx_0 = 0$. Mais on a alors aussi comme C commute avec B, $BCx_0 = CBx_0 = Cx_0 = 0$, ce qui implique que (x_0, Cx_0) n'est pas un système libre. Donc C est une homothétie de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ i.e. $C = \lambda I_E$.

b) La linéarité est classique et triviale. La trace prend ses valeur dans $\mathbb{R}$, c'est donc bien un élément de E^*. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, AB a pour terme générique sur sa diagonale $\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,i}$ et pour trace

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i}b_{i,j} = tr(BA).$$

c) La linéarité est évidente. Comme $dimE = dimE^*$, il suffit de démontrer que $Ker\phi = \{0\}$. Pour cela soit A tel que $\phi_A = 0$ donc pour tout M en particulier pour tout élément $e_{i,j}$ de la base canonique de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ on a , $i, j = 1, ..., n$

$$tr(Ae_{i,j}) = 0$$

mais un calcul direct donne

$$tr(Ae_{i,j}) = a_{j,i} = 0$$

d'ou $A = 0$.

d) On remaque que pour tout $\lambda > 0$ $\lambda tr(.)$ convient. On va montrer que ce sont les seules fonctions linéaires qui vérifient cette propriétés.

Comme ψ est dans E^* d'après c) il existe une matrice C telle que

$$\psi = \phi_C$$

L'égalité $\psi(AB) = \psi(BA)$ implique donc que, pour tout B

$$tr(CAB) = tr(ABC) = tr(CAB)$$

donc $tr((CA - AC)B) = 0$ soit $CA - AC = 0$. Donc C commute avec tout élément de $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$ et c'est une homothétie $C = \lambda I_E$. On peut donc conclure que ψ est de la forme $\psi = \phi_{\lambda I_E} = \lambda tr(.)$. Les seules applications linéaires vérifiant la propriété $\psi(AB) = \psi(BA)$ sont donc des multiples de la trace.

Exercice 2 (facile)

a) Le polynome caractéristique de M_n est

$$C_A(x) = x^2 - 2x + 1 + \alpha^2/n^2$$

de racines dans $\mathbb{C}$

$$\lambda_1 = 1 - i\alpha/n$$

$$\lambda_2 = 1 + i\alpha/n.$$

Ces deux racines qui sont les valeurs propres de M_n sont distinctes, non nulles, donc M_n est diagonalisable et inversible dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

La résolution du système

$$\begin{cases} x - \frac{\alpha}{n}y = (1 + i\alpha/n)x \\ \frac{\alpha}{n}x + y = (1 + i\alpha/n)y \end{cases}$$

conduit au vecteur propre associé à λ_1,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

et de manière similaire à

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

associé à λ_2.

On a donc pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

$$A = P^{-1} Diag(\lambda_i) P.$$

b) On sait que

$$\lim_{n \to \infty} (1 + i\alpha/n)^n = \exp(i\alpha).$$

Une démonstration simple est de considérer, le log complexe associé à exp,

$$\log((1 + i\alpha/n)^n) = n \log((1 + i\alpha/n)) \to i\alpha.$$

Sinon (si on ne le connais pas) on montre respectivement que le module tend vers 1 et que l'angle tend vers α... ce qui est aussi immédiat.

c) On a donc d'après a)

$$M_n^n = P^{-1}\begin{pmatrix} (1+\frac{i\alpha}{n})^n & 0 \\ 0 & (1-\frac{i\alpha}{n})^n \end{pmatrix} P$$

$$\to P^{-1}\begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Problème

Première partie

a) $\preceq$ est une relation d'ordre non total. En effet, pour tout U, V, W de $\mathcal{A}(E)$, on a

i) $U \preceq U$

ii) $U \preceq V$ et $V \preceq W \Rightarrow U \preceq W$ (*trivial*)

iii) Si $U \preceq V$ et $V \preceq U$ alors $U - V$ est dans $\mathcal{A}(E)$ et $< (U-V)x, x >= 0$ d'où $< (U-V)x, y >= 0$ pour tout x, y (appliquer la relation précédente en $x+y$). Donc $U - V = 0$.

$\preceq$ est donc une relation d'ordre.

Si $n = 1$, alors l'ordre $\preceq$ se réduit à l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ et il est donc total.

Si $n \geq 2$, il n'est pas total. Il suffit de donner un contrexemple pour $n = 2$. On prend pour cela dans une base $e_1,\ e_2$,

$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas comparables pour cette relation: en effet, pour $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $< x, (U-V)x >= x_1^2 - x_2^2$ n'est ni positive ni négative. Pour n supérieur on peut prendre le même exemple en complètant les matrices avec des zéros partout ailleurs.

b) On remarque d'abord que BUB^* BVB^* sont bien dans $\mathcal{A}(E)$, lorsque U et V le sont. Mais on a

$$< x, (BVB^* - BUB^*x >=< x, B(V-U)B^*x >$$
$$=< B^*x, (V-U)B^*x >\geq 0, \text{ car } U \preceq V.$$

donc $BUB^* \preceq BVB^*$.

c) Soit λ une valeur propre de V de vecteur propre associé x_0 alors on a

$$0 \leq < x_0, Vx_0 >= \lambda||x_0||^2$$

comme $x_0 \neq 0$, cela implique $\lambda \geq 0$.

La réciproque est évidente il suffit d'écrire dans une base orthonormée de valeur propre $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ et

$$< x, Vx >= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

d) Dans une base orthonormée de v.p. comme précédemment, on pose

$$C = diag(\sqrt{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}$$

de sorte que $< x, Cx >= \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}x_i^2$, que ce qui est légitime puisque toutes les valeurs propres de V sont positives. Alors on a évidemment $V = C^2$.

e) On note dans la suite $vect(\mu, A)$ l'espace propre associé à la valeur propre μ de la matrice A. On note tout d'abord que si $x \in vect(\sqrt{\lambda}, C)$ alors

$$Vx = C^2x = C\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}Cx = \lambda x$$

donc $x \in vect(\lambda, V)$. Ceci montre

$$vect(\sqrt{\lambda}, C) \subset vect(\lambda, V)$$

Inversement, soient $\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_p}$ les p valeurs propres distinctes (positives de C). V et C étant diagonalisable (par construction) on a

$$E = \underset{i=1,\dots,p}{\oplus} Vect(\sqrt{\lambda_i}, C) = \underset{i=1,\dots,p}{\oplus} Vect(\lambda_i, V)$$

comme on a l'inclusion

$$vect(\sqrt{\lambda_i}, C) \subset vect(\lambda_i, V), \ i = 1, ..., p,$$

on a alors nécessairement l'égalité (prendre une base...).

Pour l'unicité, si C_1 et C_2 conviennent alors pour tout $x \in Vect(\lambda_i, V), \ i = 1, ..n$

$$(C_1 - C_2)x = \sqrt{\lambda_i}x - \sqrt{\lambda_i}x = 0$$

donc C_1 et C_2 coincident sur tous les sous espace propres (dont la somme vaut E) donc sur E.

f) V inversible $\Longrightarrow$ toutes les vp. de V sont strictement positives donc a fortiori celles de $V^{1/2}$ qui est donc inversible. Inversement si $(V^{1/2})^{-1}$ existe alors $V(V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1} = (V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1}V = I$ et donc $V^{-1} = (V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1}$. Donc par unicité de la racine carré

$$(V^{-1})^{1/2} = (V^{1/2})^{-1}.$$

Deuxième partie

a) On peut toujours supposer quitte à renormaliser les u_i que ceux-ci forment une base orthonormée. On peut s'attendre à ce que $M_p = \lambda_{i_1}$ la plus grande valeur propre associée et $m_p = \lambda_{i_p}$, la plus petite parmi les indices choisis.

Si $x \in F_p \backslash \{0\}, \ x = \sum_{j=1}^{p} x_{i_j} u_{i_j}$ on a

$$< x, V(x) >= \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i_j} x_{i_j}^2$$

$$\leq \lambda_{i_1} \sum_{i=1}^{p} x_{i_j}^2 = \lambda_{i_1} < x, x >$$

donc $M_p \leq \lambda_{i_1}$. mais pour $x = u_{i_1}$ on a $< x, V(x) > / < x, x >= \lambda_{i_1}$ d'où

$$M_p = \lambda_{i_1}.$$

La démonstration est similaire (borne inf au lieu de sup) pour m_p.

b)D'après ce qui precède on a immédiatement

$$M_{V,p} = \lambda_p$$

$$m_{U,p} = \mu_p.$$

c) On a $\dim(F^V_{n-p+1}) = n-p+1$ et $\dim(F^U_p) = p$ donc forcément $F^V_{n-p+1} \cap F^U_p \neq \{0\}$ (sinon on aurait $\dim(F^V_{n-p+1}) + \dim(F^U_p) \leq n$).

Soit donc $x_0 \neq 0$ dans $F^V_{n-p+1} \cap F^U_p$ on a alors

$$\mu_p \leq \frac{< x_0, Ux_0 >}{< x_0, x_0 >} \leq \frac{< x_0, Vx_0 >}{< x_0, x_0 >} \leq \lambda_p$$

la deuxième inégalité provenant du fait que $U \preceq V$ et les autres du b). Ceci est vrai pour tout p, ce qui entraine que

$$sp(U) \leq sp(V)$$

d) On vérifie que $Sp(U) = \{1, 0\}$, $Sp(V) = \{1, 0\}$ donc $Sp(U) \leq Sp(V)$. Mais on a dans une base (e_1, e_2), $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$,

$$< x, U(x) >= x_1^2$$

$$< x, V(x) >= \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$$

et $x_1^2 \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$ n'est pas toujours vraie : (prendre $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$).

e) Comme A est orthogonale, on a $sp(AUA^*) = sp(U)$ donc d'après c),

$V \succeq AUA^* \Longrightarrow sp(U) \leq sp(V)$.

La réciproque est moins évidente.

On se place dans une base orthonormée $(u_1, u_2, ...u_n)$ de vecteurs propres de V associé à $sp(V)$ et on considère W définit par

$$Wu_i = \mu_i u_i$$

(où les μ_i sont valeurs de $sp(U)$). On a bien évidemment $sp(U) = sp(W)$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$

$$< x, Vx >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2 =< x, Wx >$$

soit

$$V \geq W$$

Mais comme S et U sont similaires , il exite une transformation orthogonale (simplement un changement de base) tel que $W = AUA^*$ et le résultat est démontré.