ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE - ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES VOIE B - Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES, DURÉE : 3 HEURES

PROBLÈME

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, défini par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \ < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad quand\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique lorsque $< f(x), y > = < x, f(y) >$ pour tous x et y de E. On rappelle que la matrice d'un tel endomorphisme, par rapport à n'importe quelle base orthonormée, est symétrique, et réciproquement.

Le but de ce problème est d'établir le théorème spectral pour les endomorphismes symétriques (première partie), et d'en voir quelques applications (seconde partie).

Première partie

1. *Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sont nécessairement réelles.*

Considérons $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme caractéristique de A et X et Y des matrices $n \times 1$ à coefficients réels telles que $A(X + iY) = \lambda(X + iY)$ ($X + iY$ n'étant pas la colonne nulle).

Si $M = (M_{ij})_{i \leq I, j \leq J} \in \mathcal{M}_{I,J}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{M_{ij}})_{i \leq I, j \leq J}$, où la barre désigne la conjugaison. Si $\mu \in \mathbb{C}$ et M_1 et M_2 sont des matrices à coefficients complexes pour lesquelles le produit $M_1 M_2$ a un sens, alors

$$\overline{\mu M} = \overline{\mu}\,\overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{M_1 M_2} = \overline{M_1}\,\overline{M_2}.$$

Comme A, X, Y sont à coefficients réels, on a $\overline{A} = A$, $\overline{X} = X$, $\overline{Y} = Y$. Ainsi $A(X - iY) = \overline{\lambda}(X - iY)$ et, par symétrie de A,

$$\begin{aligned} \lambda({}^t(X + iY)(X - iY)) = {}^t(A(X + iY))(X - iY) = {}^t(X + iY)A(X - iY) &= {}^t(X + iY)(\overline{\lambda}(X - iY)) \\ &= \overline{\lambda}\,({}^t(X + iY)(X - iY)). \end{aligned}$$

Mais ${}^t(X + iY)(X - iY) = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + Y_i^2)$ est un réel non nul par hypothèse ($X + iY \neq 0$) donc $\lambda = \overline{\lambda}$ autrement dit λ est réel.

2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.*

a) Montrer que si $x \neq 0$ et W est le sous-espace vectoriel engendré par les $f^j(x)$ ($j \in \mathbb{N}$) (où $f^0 = id$ et $f^{j+1} = f \circ f^j$), alors il existe un vecteur propre de f dans W.

L'espace E étant de dimension finie n, il existe un plus petit entier $m \leq n$ (et non nul puisque $x \neq 0$) tel que la famille $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^m(x)\}$ soit liée. Il existe donc des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ tels que

$$f^m(x) + a_{m-1} f^{m-1}(x) + \ldots + a_2 f^2(x) + a_1 f(x) + a_0 x = 0$$

ce qui peut se réécrire en : il existe des *complexes* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tels que

$$(f - \mu_1 id_E) \circ (f - \mu_2 id_E) \circ \cdots \circ (f - \mu_{m-1} id_E) \circ (f - \mu_m id_E)(x) = 0.$$

Comme par définition de m la famille $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{m-1}(x)\}$ est libre, le vecteur

$$y = (f - \mu_2 id_E) \circ \cdots \circ (f - \mu_{m-1} id_E) \circ (f - \mu_m id_E)(x)$$

est nécessairement non nul, et il appartient, d'une part à W, d'autre part à $\ker(f - \mu_1 id_E)$: $y \in W$ est donc vecteur propre de f (associé à la valeur propre μ_1). On remarque que μ_1 est en fait forcément réelle, en vertu de la question 1, puisque f est symétrique et que le spectre de f est égal à celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

b) Rappeler pourquoi toute famille de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux est libre.

Supposons que $(u_i)_{i \leq m}$ soit une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, et que $(\alpha_i)_{i \leq m}$ soient des réels tels que $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$ soit le vecteur nul. On a donc, pour chaque $k \leq m$,

$$0 = < u_k, u > = \sum_{i=1}^m \alpha_i < u_k, u_i > = \alpha_k \|u_k\|^2$$

(car dans la somme, un seul des produits scalaires est non nul, par hypothèse sur les u_i). Ainsi $\alpha_k = 0$ pour tout $k \leq m$.

c) Montrer que si $x_1, \ldots, x_r$ ($1 \leq r \leq n-1$) sont des vecteurs propres de f formant un système orthogonal, engendrant le sous-espace noté V_r, alors il existe un vecteur propre x_{r+1} de f dans l'orthogonal de V_r.

Comme $r \leq n-1$ et $n = \dim(E)$, l'orthogonal de V_r n'est pas réduit au vecteur nul, donc on considère $x \neq 0$ qui soit dans $V_r^\perp$, autrement dit $< x, x_i > = 0$ ($\forall i \leq r$). En utilisant la question 2.*a.*, on considère alors y un vecteur propre de f dans le sous-espace engendré par $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^m(x)$ (où $1 \leq m \leq n$). On note ainsi $y = \sum_{i=0}^m \alpha_i f^i(x)$, et on a $f(y) = \lambda y$ pour un certain réel λ (voir fin de la correction du paragraphe 2.*a.*).

Maintenant, on veut montrer que y est orthogonal à chacun des x_i ($i \leq r$), et on posera alors $x_{r+1} = y$. Pour cela, comme

$$< y, x_i > = \sum_{j=0}^m \alpha_j < f^j(x), x_i >$$

et f^j est symétrique (voir ci-dessous), on a (en notant λ_i la valeur propre associée à x_i)

$$< y, x_i > = \sum_{j=0}^m \alpha_j < x, f^j(x_i) > = \alpha_0 < x, x_i > + \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_i^j < x, x_i > = 0$$

car par construction x est orthogonal à chacun des x_i. La symétrie de f^j (pour $j = 1, \ldots, m$, le cas $j = 0$ étant trivial) s'établit par récurrence : $f^1 = f$ est symétrique, et si u et v sont deux vecteurs, par symétrie de f

$$\begin{aligned} < u, f^j(v) > = < u, f(f^{j-1}(v)) > &= < f(u), f^{j-1}(v) > \\ &= (\text{par hypothèse de récurrence}) < f^{j-1}(f(u)), v > \\ &= < f^j(u), v > . \end{aligned}$$

d) En déduire que f est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Soit $x \neq 0$ un vecteur arbitraire de E; soit x_1 un vecteur propre de f appartenant au sous-espace engendré par les $f^j(x)$ où $j \in \mathbb{N}$. En utilisant successivement la question précédente $n-1$ fois, on peut donc considérer x_2 vecteur propre de f qui soit orthogonal à x_1, puis x_3 vecteur propre de f orthogonal à x_1 et à x_2, etc... jusqu'à avoir $(x_1, \ldots, x_n)$ système orthogonal de vecteurs propres de f. En normant chacun des x_i (*i.e.* en remplaçant chaque x_i par $\|x_i\|^{-1} x_i$) on a donc construit une base orthonormée de vecteurs propres de f.

3. *En déduire que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe une matrice Λ diagonale de taille $n \times n$ et une matrice P orthogonale de taille $n \times n$ ($^tPP = I$) telles que $^tPAP = \Lambda$.*

Considérons $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A; f est donc symétrique. Nous avons exhibé à la question précédente une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs propres, f est donc diagonalisable. Il en est donc de même pour A. Notons P la matrice $n \times n$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est constituée des coordonnées de x_i dans la base $\mathcal{B}$. La base $(x_1, \ldots, x_n)$ étant orthonormée, P est une matrice orthogonale (i.e. vérifiant ${}^tPP = I$). On a donc $P^{-1} = {}^tP$ et $A = P\Lambda P^t$, où $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et λ_i est la valeur propre de f à laquelle le vecteur propre x_i est associé.

Seconde partie

Dans toute cette partie A désigne une matrice symétrique de taille n à coefficients réels, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). On rappelle qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ orthogonale est inversible, son inverse est sa transposée, et elle vérifie ${}^tPP = I$ (en particulier $\sum_{i=1}^n (P_{ij})^2 = 1$ $(\forall i = 1..n)$). Les questions 1 et 2 sont indépendantes et utilisent la question 3. de la première partie.

1. *a) Soit* $R_A : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto R_A(x) = {}^txAx/{}^txx$.

Montrer que R_A a comme valeurs maximum et minimum $\max_i \lambda_i$ *et* $\min_i \lambda_i$ *respectivement, et que $R_A(x) = \lambda_i$ dès que $Ax = \lambda_i x$.*

On suppose que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ (sans perte de généralité). Soit P la matrice orthogonale construite dans le paragraphe $I.3.$, avec $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et $y = {}^tPx$. On a alors,

$$R_A(x) = \frac{{}^txP\Lambda P^tx}{{}^txx} = \frac{{}^ty\Lambda y}{{}^ty(PP^t)y} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Comme $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, ce quotient est inférieur ou égal à λ_1 et vaut λ_1 par exemple lorsque $y_2 = \cdots = y_n = 0$ et $y_1 \neq 0$. De même, le quotient est supérieur ou égal à λ_n et vaut λ_n par exemple lorsque $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$ et $y_n \neq 0$. Le fait que $R_A(x) = \lambda_i$ dès que $Ax = \lambda_i x$, est évident.

b) Trouver des réels (a, b, c) qui minimisent la quantité

$$\phi(a, b, c) = \frac{-2a^2 - b^2 + 2c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $x = (a\ b\ c)^t \in \mathbb{R}^3$. Le numérateur est une forme quadratique en les inconnues a, b, c, et on reconnait sans peine que la matrice symétrique qui lui est associée est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\phi(a, b, c) = \frac{-2a^2 - b^2 + 2c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 + c^2} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} / (a^2+b^2+c^2) = \frac{{}^txAx}{{}^txx} = R_A(x).$$

Minimiser $\phi(a, b, c)$ sous la contrainte $a^2+b^2+c^2 = 1$ revient ainsi à minimiser $R_A(x)$: il nous suffit donc de trouver x vecteur propre de A associé à la plus petite valeur propre λ_3 de A. On calcule le polynôme caractéristique de A et on trouve $\lambda_3 = -2$ et $x = (a, 0, 0)$ comme vecteur propre de A associé à λ_3, où a non nul quelconque convient. Des solutions sont donc $a \in \mathbb{R}, b = c = 0$.

2. *a) Montrer la propriété suivante (moyenne géométrique $\leq$ moyenne arithmétique) : si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ désigne des réels ≥ 0 de somme 1, et $(u_1, \ldots, u_n)$ des réels strictement positifs, alors*

$$\prod_{j=1}^n u_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j.$$

La propriété à démontrer peut se réécrire en

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log(u_j) \leq \log\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) \quad \text{pour tous } \alpha_j \geq 0 \text{ sommant à 1, et } u_j > 0.$$

Il s'agit donc là ni plus ni moins du fait que la fonction log est une fonction concave, et donc que le log d'une combinaison convexe $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ des u_j est supérieur ou égal à la même combinaison convexe des $\log(u_j)$. Si on ne dispose comme définition de la concavité que de

$$\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log(x) + (1-\lambda)\log(y) \quad \text{pour tous } \lambda \in [0,1] \text{ et } x, y > 0$$

alors la propriété plus générale ci-dessus (où $n \geq 2$) se démontre sans peine par récurrence, à l'aide de la décomposition :

$$\log\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \log(\lambda x + (1-\lambda)y) \;\; \text{où } \lambda = \alpha_n,\ x = u_n,\ y = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_j/(1-\alpha_n))u_j$$

donc

$$\log\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) \geq \lambda \log(x) + (1-\lambda)\log(y) = \alpha_n \log(u_n) + (1-\alpha_n)\log\left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha'_j u_j\right)$$

où $\alpha'_j = \alpha_j/(1-\alpha_n)$ sont ≥ 0 et de somme 1, d'où la propriété à l'ordre n en utilisant l'hypothèse de récurrence à l'ordre $n-1$ (remarque : si $\alpha_n = 0$ alors c'est immédiat et ce qui précède n'a pas lieu d'être).

b) En déduire que, si $\lambda_i > 0$ *(*$\forall i \leq n$*), alors* $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.

On part de $A = P\Lambda P^t$, qui donne

$$A_{ii} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(\Lambda P^t)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_{ij}(P^t)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (P_{ij})^2.$$

On pose alors $u_j = \lambda_j > 0$ (par hypothèse), et $\alpha_j = (P_{ij})^2$ positifs et de somme 1, de sorte que l'utilisation de l'inégalité donnée en 3.*a.* permet d'écrire

$$A_{ii} \geq \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{(P_{ij})^2}.$$

En écrivant cette inégalité pour chaque i, et en les multipliant ensemble, il vient

$$\prod_{i=1}^{n} A_{ii} \geq \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{(P_{ij})^2} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} \lambda_j^{(P_{ij})^2} = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\sum_{i=1}^{n}(P_{ij})^2} = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Le terme de droite, produit des valeurs propres de A, est égal au déterminant de A (propriété connue).

EXERCICE N^{0}1

Soit $(G,.)$ un groupe fini (noté multiplicativement), d'élément neutre noté e. On rappelle que l'ordre de G est son cardinal (noté $|G|$) et que l'ordre d'un élément x est le cardinal du sous-groupe qu'il engendre (nous admettrons que c'est le plus petit entier non nul n tel que $x^n = e$).

Rappels :

- Le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ est noté S_n, son cardinal est $n!$.
- Théorème de Lagrange : Si G est un groupe fini alors le cardinal de tout sous-groupe de G divise le cardinal de G.

1. *Montrer que pour tout $x \in G$, $x^{|G|} = e$.*

   Soit $x \in G$. Notons n l'ordre de x. D'après le théorème de Lagrange, n (qui est le cardinal du sous-groupe engendré par x) divise $|G|$ (le cardinal de G). Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|G| = pn$ et donc $x^{|G|} = (x^n)^p = e^p = e$.

   On appelle **exposant** de G le plus petit entier m tel que pour tout $x \in G$, $x^m = e$.

2. *Soit $x \in G$ et m un entier non nul tel que $x^m = e$. Montrer que l'ordre de x divise m.*

   Notons encore n l'ordre de x. Il est clair que $n < m$. Soit $r \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne de m par n (il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = nq + r$). Alors $x^m = x^{nq}.x^r = e.x^r = x^r = e$. Or r est plus petit que n et n est le plus petit entier non nul tel que $x^n = e$, donc $r = 0$, ce qui veut dire que n divise m.

3. *Déterminer l'exposant de S_3 ainsi que S_4 (en particulier dites pourquoi il n'y a dans S_4 que des éléments d'ordres $1, 2, 3$ ou 4).*

   S_3 est d'ordre $3! = 6$, donc les éléments de S_3 sont d'ordre $1, 2, 3$ ou 6. Il est clair alors que l'exposant de S_3 est $ppcm(2,3,6) = 6 = |S_3|$.

   S_4 est d'ordre $4! = 24$. Mais les éléments ne peuvent être que d'ordre $1, 2, 3$ ou 4. En effet, toute permutation de S_4 peut s'écrire comme produit de cycles disjoints et l'ordre d'un cycle de longueur p est p, ainsi, les éléments de S_4 sécrivent, soit comme cycle de longueur 4, ou 3 soit comme produit de deux cycles de longueurs 2 (des transpositons).

   Ainsi, l'exposant de S_4 est $ppcm(2,3,4) = 12 < |S_4|$.

   On suppose à présent que G est un groupe d'exposant 24.

4. *Expliquez rapidement pourquoi il existe $u \in G$ et $v \in G$ tels que $u^{12} \neq e$ et $v^8 \neq e$.*

   Si on suppose que pour tout x de G $x^{12} = e$, l'exposant de G serait ≤ 12, or c'est 24, donc il existe $u \in G$ tel que $u^{12} \neq e$. On fait le même raisonnement pour v.

5. *Montrer que v^8 est d'ordre 3 et u^3 est d'ordre 8.*

   On a $(v^8)^3 = v^{24} = e$ donc l'ordre de v^8 divise 3. C'est donc 1 ou 3. Or $v^8 \neq e$ donc l'ordre de v^8 est bien 3.

   On a de même $(u^3)^8 = u^{24} = e$, donc l'ordre de u^3 divise 8, c'est donc $1, 2, 4$ ou 8. Or $u^{12} = (u^3)^4 \neq e$ donc l'ordre n'est pas 4. Si l'ordre était 2 alors on aurait $u^6 = e$ donc $(u^6)^2 = u^{12} = e$, ce qui est faux. Donc l'ordre de u^3 n'est pas 2. Si l'ordre était 1, on aurait également $u^{12} = e$, donc l'ordre de u^3 n'est pas 1. C'est donc bien 8.

6. *Si, de plus, G est commutatif, montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre 24 (à déterminer).*

   Posons $x = u^3v^8$. L'ordre de x divise 24, c'est donc $1, 2, 3, 4, 6, 12$ ou 24. Or, $x^8 = u^{24}v^{64} = e.v^{16} = (v^8)^2 \neq e$ car l'ordre de v^8 est 3. De même $x^{12} = (u^3)^8.(u^3)^4.(v^8)^{12} = u^{12} \neq e$, l'ordre n'est donc ni 8 ni 12. Si l'ordre était $1, 2, 3, 4$ ou 6, on aurait $x^{12} = e$ (car 12 est multiple de $1, 2, 3, 4$ et 6. Ainsi l'ordre de u^3v^8 est 24.

EXERCICE N^{0}2

Soit l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $X(P(X) - P(X-1))$.

1. *Montrer que f est une application linéaire qui préserve le degré des polynômes non-constants (effectuer une récurrence). En déduire que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.*

   Montrons tout d'abord que f est bien linéaire : Soit λ dans $\mathbb{R}$, P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   $$f(\lambda P+Q) = X((\lambda P+Q)(X)-(\lambda P+Q)(X-1)) = X((\lambda P(X)+Q(X))-(\lambda P(X-1)+Q(X-1))),$$

   d'où

   $$f(\lambda P + Q) = \lambda X(P(X) - P(X-1)) + XQ(X) - Q(X-1)) = \lambda f(P) + f(Q).$$

   Il est clair que les polynômes constants ont pour image 0. Considérons à présent un polynôme de degré 1 de la forme $P = aX + b$, alors $f(P) = X(aX + b - aX + a - b) = aX$ est également de degré 1. Supposons que l'application f conserve les degrés jusqu'au degré $n-1$. Un polynôme de degré n peut s'écrire comme aX^n (où $a \neq 0$) plus un polynôme de degré strictement inférieur à n. L'image par f du second terme a (par hypothèse de récurrence) un degré strictement inférieur à n . Pour le premier terme, on a

   $$f(aX^n) = af(X^n) = aX(X^n - (X-1)^n) = aX^{n+1} - aX^{n+1} + anX^n + \ldots,$$

   où les $\ldots$ représentent des termes de degrés strictement inférieur à n . Ainsi, l'image de aX^n est bien de degré n.

2. *Ecrire la matrice M représentant f dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.*

   Comme les polynômes constants ont pour image 0 par f et que tout polynôme image par f n'a pas de terme constant (puisque on termine par une multiplication par X), il est clair que la matrice M contient des 0 sur la première ligne et la première colonne. De plus, comme f préserve le degré, M est triangulaire supérieure . Pour obtenir les termes non nuls de la matrice M il suffit de développer $f(X^k)$ grâce à la formule du binôme pour tout $1 \leq j \leq n$.

   $$f(X^j) = X(X^j - (X-1)^j) = X^{j+1} - \sum_{i=0}^{j} C_j^i X^{i+1}(-1)^{j-i} = \sum_{i=1}^{j} C_j^{i-1} X^i (-1)^{j-i}.$$

   Ainsi, les termes $M_{i,j}$ non nuls sont égaux à $C_j^{i-1}(-1)^{j-i}$. En particulier, les termes sur la diagonale sont de la forme j.

3. Soit le polynôme $P_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$, pour $k \geq 1$ et $P_0 = 1$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de vecteurs propres et donner une matrice diagonale semblable à M.

   Il est clair que P_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Pour tout $k \geq 1$, on a

   $$f(P_k) = X(X(X-1)\ldots(X-k+1)-(X-1)\ldots(X-k)) = X(X-1)\ldots(X-k+1)(X-(X-k)) = kP_k.$$

   P_k est donc un vecteur propre associé à la valeur propre k. Comme il y en a $n+1$ et que des vecteurs propres par rapport à des valeurs propres différentes sont obligatoirement libres , ils forment bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On dispose d'une base de vecteurs propres, M est donc diagonalisable en

   $$\Lambda = diag(0, 1, \ldots, n),$$