ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

Soit G un groupe fini (noté multiplicativement), d'élément neutre noté e. On rappelle que l'ordre de G est son cardinal (noté $|G|$) et que l'ordre d'un élément x est le cardinal du sous-groupe qu'il engendre (nous admettrons que c'est le plus petit entier non nul n tel que $x^n = e$).

Rappels :

- Le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ est noté S_n, son cardinal est $n!$.
- Théorème de Lagrange : Si G est un groupe fini alors le cardinal de tout sous-groupe de G divise le cardinal de G.

1. Montrer que pour tout $x \in G$, $x^{|G|} = e$.

   On appelle **exposant** de G le plus petit entier n tel que pour tout $x \in G$, $x^n = e$.

2. Soit $x \in G$ et m un entier non nul tel que $x^m = e$. Montrer que l'ordre de x divise m.
3. Déterminer l'exposant de S_3 ainsi que S_4 (en particulier dites pourquoi il n'y a dans S_4 que des éléments d'ordres $1, 2, 3$ ou 4).

   On suppose à présent que G est un groupe d'exposant 24.

4. Expliquez rapidement pourquoi il existe $u \in G$ et $v \in G$ tels que $u^{12} \neq e$ et $v^8 \neq e$.
5. Montrer que v^8 est d'ordre 3 et u^3 est d'ordre 8.
6. Si, de plus, G est commutatif, montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre 24 (à déterminer).

EXERCICE N^{0}2

Soit l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $X(P(X) - P(X-1))$.

1. Montrer que f est une application linéaire qui préserve le degré des polynômes non-constants (effectuer une récurrence). En déduire que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Ecrire la matrice M représentant f dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
3. Soit le polynôme $P_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$, pour $k \geq 1$ et $P_0 = 1$. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, P_k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre k puis que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base. En déduire une matrice diagonale semblable à M.

PROBLÈME

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, défini par rapport à la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ par

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ \text{ quand } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est *symétrique* lorsque $< f(x), y > = < x, f(y) >$ pour tous x et y de E. On rappelle que la matrice d'un tel endomorphisme, par rapport à n'importe quelle base orthonormée, est symétrique, et réciproquement.

Le but de ce problème est d'établir le théorème spectral pour les endomorphismes symétriques (première partie), et d'en voir quelques applications (seconde partie).

Première partie

1. Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sont nécessairement réelles.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique.

   a) Justifier le fait qu'il existe un plus petit entier $m \leq n$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ tels que
   $$f^m(x) + a_{m-1} f^{m-1}(x) + \ldots + a_2 f^2(x) + a_1 f(x) + a_0 x = 0$$
   et montrer que si $x \neq 0$ et W est le sous-espace vectoriel engendré par les $f^j(x)$ $(j \in \mathbb{N})$ (où $f^0 = id$ et $f^{j+1} = f \circ f^j$), alors il existe un vecteur propre de f dans W.

   b) Rappeler pourquoi toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux est libre.

   c) Montrer que pout tout $j \in \mathbb{N}$, f^j est symétrique.

   d) Montrer que si $x_1, \ldots, x_r$ $(1 \leq r \leq n-1)$ sont des vecteurs propres de f formant un système orthogonal, engendrant le sous-espace noté V_r, alors il existe un vecteur propre x_{r+1} de f dans l'orthogonal de V_r.

   Indication : partir d'un élément non-nul x de $V_r^{\perp}$, exploiter *a*), et *b*).

   e) En déduire que f est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres.

3. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe une matrice Λ diagonale de taille $n \times n$ et une matrice P orthogonale de taille $n \times n$ $({}^tPP = I)$ telles que ${}^tPAP = \Lambda$.

Seconde partie

Dans toute cette partie A désigne une matrice symétrique de taille $n \times n$ à coefficients réels, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). On rappelle qu'une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ orthogonale est inversible, son inverse est sa transposée, et elle vérifie $\sum_{i=1}^{n} (P_{ij})^2 = 1$ $(\forall i = 1..n)$. Les questions 1 et 2 sont indépendantes et utilisent la question 3 de la première partie.

1. *a*) Soit $R_A : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto R_A(x) = {}^txAx / {}^txx$.

   Montrer que R_A a comme valeurs maximum et minimum $\max_i \lambda_i$ et $\min_i \lambda_i$ respectivement, et que $R_A(x) = \lambda_i$ dès que $Ax = \lambda_i x$.

   b) Trouver des réels (a, b, c) qui minimisent la quantité
   $$\phi(a, b, c) = \frac{-2a^2 - b^2 + 2c^2 + 2bc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2. *a*) En utilisant la concavité de la fonction log, à savoir

$$\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log(x) + (1-\lambda)\log(y) \quad \text{pour tous } \lambda \in [0,1] \text{ et } x, y > 0,$$

montrer la propriété suivante (moyenne géométrique $\leq$ moyenne arithmétique): si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ désigne des réels ≥ 0 de somme 1, et $(u_1, \ldots, u_n)$ des réels strictement positifs, alors

$$\prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j.$$

b) En déduire que, si $\lambda_i > 0$ $(\forall i \leq n)$, alors $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.