AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES
VOIE B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice M suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

   Pour quelles valeurs de m cette matrice est-elle inversible ? Calculer, dans ce cas, la matrice inverse M^{-1}.

   Correction : $det(M) = (2-m)(m-1)^2$ donc M est inversible si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq 2$. Dans ce cas,

$$M^{-1} = \frac{1}{(m-2)(m-1)^2} \begin{pmatrix} 3m-4 & 4m-5 & m^2-6m+6 \\ 2(m-1) & m^2-1 & 2(1-m) \\ m(m-2) & m-2 & 2-m \end{pmatrix}$$

2. Soient a, b, c dans $\mathbb{R}$. Résoudre, en utilisant le 1), le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + (m-2)z & = & a \\ 2x + (m-4)y - 2z & = & b \\ (m+2)x - 4y - 3z & = & c \end{array} \right.$$

   Correction : Le système s'écrit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   - *si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, M est inversible et le système admet une solution unique* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *pour tout (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$.*
   - *si $m = 1$, le système s'écrit*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & a \\ 2x - 3y - 2z & = & b \\ x - y - z & = & c - b \end{array} \right.$$

Si $a \neq c - b$, il n'y a pas de solutions et si $a = c - b$, le système devient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & c - b \\ y & = & 2c - 3b \end{array} \right.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions s'écrit $\{(x, 2c - 3b, x - 3c + 4b), x \in \mathbb{R}\}$.

- *si $m = 2$, le système s'écrit*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & a \\ z & = & \frac{2a-b}{2} \\ z & = & \frac{4a-c}{3} \end{array} \right.$$

Si $2a + 3b - 2c \neq 0$, il n'y a pas de solutions et si $2a + 3b - 2c = 0$, alors l'ensemble des solutions s'écrit $\{(x, x - a, \frac{2a-b}{2}), x \in \mathbb{R}\}$.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(e_1) & = & e_1 + 2e_2 + (m + 2)e_3 \\ f(e_2) & = & -e_1 + (m - 4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) & = & (m - 2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{array} \right.$$

(a) Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

Correction : Il s'agit de la matrice M.

(b) Pour quelles valeurs de m, l'application f est-elle bijective ? Donner, dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

Correction : f est bijective si et seulement si M est inversible, c'est à dire, si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq 2$. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) est M^{-1} calculée à la question 1.

(c) Pour quelles valeurs de m, les sous-espaces $Kerf$ et Imf de E sont-ils supplémentaires ?

Correction : Il suffit de trouver pour quelles valeurs de m $Kerf \cap Imf = \{0\}$. Le vecteur X est dans $Kerf$ si et seulement si ses coordonnées (x, y, z), dans la base (e_1, e_2, e_3), vérifient le système de la question 2 avec $a = b = c = 0$. Ainsi, si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, X est obligatoirement le vecteur nul et dans ce cas $Kerf \cap Imf = \{0\}$. Si $m = 1$ alors le vecteur X est de la forme ${}^t(a\ 0\ a)$, où $a \in \mathbb{R}$ et il est facile de vérifier que tous ces vecteur là sont dans Imf, donc que $Kerf \cap Imf \neq \{0\}$. Si $m = 2$, alors le vecteur X est de la forme ${}^t(b\ b\ 0)$, où $b \in \mathbb{R}$ et il est facile de vérifier que ces vecteurs (sauf le vecteur nul) ne sont pas dans Imf et donc $Kerf \cap Imf = \{0\}$. En conclusion, les sous-espaces $Kerf$ et Imf de E sont supplémentaires si et seulement si $m \neq 1$.

EXERCICE N^{0}2

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? En particulier, préciser leur ordre de multiplicité.

   Correction : Le polynôme caractéristique de f est $P_X = (1-X)(2-X)(m-X)$. Ainsi, lorsque m est différent de 1 et de 2, f admet trois valeurs propres 1, 2 et m. Lorsque $m = 1$, 1 est valeur propre double et 2 valeur propre simple et lorsque $m = 2$, 1 est valeur propre simple et 2 valeur propre double.

2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier soigneusement la réponse.

   Correction :

   - *Lorsque m est différent de 1 et de 2, f admet trois valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$.*
   - *Lorsque $m = 1$, 1 est valeur propre double. Cherchons la dimension de E_1, le sous-espace propre associé. Soit le vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique :*

     $$f(u) = u \Leftrightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

     Ainsi, le sous-espace $E_1 = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double . f n'est donc pas diagonalisable quand $m \neq 1$.
   - *Lorsque $m = 2$, 2 est valeur propre double. Cherchons la dimension de E_2, le sous-espace propre associé. Soit le vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique :*

     $$f(u) = 2u \Leftrightarrow (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = x.$$

     Ainsi, le sous-espace $E_2 = \{(x, y, x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est de dimension 2 qui est bien l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2. f est donc diagonalisable quand $m = 2$.

   En conclusion, f est diagonalisable si et seulement si $m \neq 1$.

3. Lorsque $m = 2$, déterminer une base de vecteurs propres de f puis calculer A^k, pour tout entier $k \geq 1$.

   Correction : à présent, $m = 2$. Nous cherchons une base (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres de f où u_1 est associé à la valeurs propre 1 et u_2 et u_3 sont associés à la valeur propre 2. Le sous-espace E_2, ayant été déterminé à la question précédente, on peut prendre $u_2 = {}^t(0\ 1\ 0)$ et $u_3 = {}^t(1\ 0\ 1)$. Cherchons à présent un vecteur u_1 de la forme ${}^t(x\ y\ z)$ et vérifiant $f(u_1) = u_1$. Il vérifie $x = y$ et $z = 0$, on peut donc prendre $u_1 = {}^t(1\ 1\ 0)$.

La matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3) *est donc*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A *s'écrit alors sous la forme* PDP^{-1}, *où* $D = diag(1, 2, 2)$ *et*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^k = PD^kP^{-1}$, *d'où*

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Problème

On se place dans un espace euclidien $(\mathcal{E}, < \cdot, \cdot >)$ de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

Remarque : dans l'énoncé, des précautions sont prises pour distinguer un élément de $\mathcal{E}$ de la matrice colonne des coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. On pourra donc recommander aux candidats de prendre les mêmes précautions dans leur copie. On rappelle également que si u et v sont deux éléments de $\mathcal{E}$ de matrices colonnes de coordonnées U et V dans la base $\mathcal{B}$, alors on a l'écriture $< u, v >= {}^tUV$, où ${}^tU$ est la matrice transposée de U.

1. On rappelle qu'une projection est un endomorphisme p de $\mathcal{E}$ qui est idempotent ($p^2 = p$), et que la projection orthogonale sur un sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est la projection p telle que $\mathcal{F} = Im(p) \perp Ker(p)$.

   (a) Montrer que si p est une projection et que la matrice P de p par rapport à la base $\mathcal{B}$ est symétrique, alors p est une projection orthogonale.

   Correction : Soit $u \in Ker(p)$, il suffit de montrer que $u \perp Im(p)$. Soit $v \in \mathcal{E}$ et notons U et V les colonnes des coordonnées des vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$. On a

   $$< u, p(v) > = {}^tUPV = {}^tU({}^tP)V = {}^t(PU)V = < p(u), v > = \ 0$$

   puisque $p(u) = 0$.

   (b) Soit la matrice

   $$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Montrer que P est la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, d'une projection orthogonale p sur un sous-espace $\mathcal{F}$ dont on déterminera une base dans $\mathcal{E}$.

   Correction : P est symétrique, et on vérifie que

   $$P^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 30 & -6 \\ 12 & -6 & 30 \end{pmatrix} = P.$$

   Il nous reste à déterminer $\mathcal{F} = Im(p)$. Soient $U = {}^t(x\ y\ z)$ et $V = {}^t(a\ b\ c)$ deux vecteurs colonnes quelconques : on a

   $$PU = V \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 6a \\ 2x + 5y - z &= 6b \\ 2x - y + 5z &= 6c \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \ \begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 6a \\ 3y - 3z &= 6(b - a) \\ -3y + 3z &= 6(c - a) \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \ \begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 6a \\ 3y - 3z &= 6(b - a) \\ 0 &= 6(b + c - 2a) \end{cases}$$

   Ainsi, $v \in \mathcal{E}$ appartient à $Im(p)$ si et seulement si $b + c - 2a = 0$, où (a, b, c) désignent les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$: p est donc la projection orthogonale sur le plan d'équation $y + z - 2x = 0$, dont une base possible a comme coordonnées $(1, 2, 0)$ et $(1, 0, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n$ de $\mathcal{E}$, et $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une base de $\mathcal{F}$.

   On note $V_1, V_2, \ldots, V_p$ les matrices colonnes $n \times 1$ des coordonnées des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ dans la base $\mathcal{B}$, et M la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les V_i.

   On considère la matrice ${}^tMM$ $(p \times p)$, dont le coefficient d'ordre (j, k) est $< v_j, v_k >$.

   (a) Montrer que le sous-espace $\mathcal{F}$ est exactement constitué des vecteurs de $\mathcal{E}$ dont la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M\Lambda$ où Λ est une matrice colonne $p \times 1$ (cette propriété sera utile à plusieurs reprises lors de la résolution de cet exercice).

   Correction : les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont exactement les vecteurs de la forme $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j$. En notant Λ la matrice colonne ${}^t(\lambda_1 \ldots \lambda_p)$, on constate que le vecteur u a comme vecteur de coordonnées $M\Lambda$ (car la coordonnée k de u vaut $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (v_j)_k$, et que $(v_j)_k$, $k$ème coordonnée de v_j, est égal à M_{kj} par construction de M, donc la somme ci-dessus vaut $\sum_j M_{kj}\Lambda_j = (M\Lambda)_k$).

   (b) Justifier l'inclusion $Ker(M) \subset Ker({}^tMM)$.

   Correction : immédiat, puisque $MU = 0$ implique ${}^tMMU = 0$.

   (c) Soit $U = {}^t(U_1\, U_2\, \ldots\, U_p)$ une matrice colonne telle que ${}^tMMU = 0$, et w le vecteur de $\mathcal{E}$ défini par $w = \sum_{i=1}^{p} U_k v_k$: la matrice colonne des coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ est donc MU.

   Montrer que $< v_j, w >= 0$ pour tout $j = 1, .., p$, et en déduire que $w = 0$. Justifier alors l'égalité $Ker(M) = Ker({}^tMM)$.

   Correction : comme $w = \sum_{i=1}^{p} U_k v_k$, on a $< v_j, w >= \sum_{k=1}^{p} < v_j, v_k > U_k$. Or par hypothèse ${}^tMMU = 0$ donc, puisque les coordonnées de ${}^tMM$ sont les $< v_j, v_k >$, on a

   $$\sum_{k=1}^{p} < v_j, v_k > U_k = 0 \textit{ pour tout } j = 1, .., p,$$

   d'où $< v_j, w >= 0$ pour tout j. En multipliant la $j^{\text{ème}}$ égalité par U_j et en sommant le tout en j, on obtient alors

   $$0 =< \sum_{j=1}^{p} U_j v_j, \sum_{k=1}^{p} U_k v_k >=< w, w >= \|w\|^2$$

   autrement dit $w = 0$ et par conséquent $MU = 0$. On a donc montré que ${}^tMMU = 0$ impliquait $MU = 0$, donc que $Ker({}^tMM) \subset Ker(M)$, cqfd.

   (d) En déduire que ${}^tMM$ a même rang que M.

   Correction : on le déduit de la question précédente et du théorème du rang

   $$rg(M) + dim(Ker(M)) = rg({}^tMM) + dim(Ker({}^tMM)).$$

   (e) Montrer que ${}^tMM$ est inversible.

   Correction : par hypothèse, M a pour rang p, puisque les v_i forment une base du sous-espace $\mathcal{F}$ de dimension p, donc ${}^tMM$, de taille $p \times p$, est de rang maximum donc inversible.

(f) Puisque ${}^tMM$ est inversible, il est donc possible de considérer la matrice

$$P = M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM$$

Montrer que P est la matrice (par rapport à la base $\mathcal{B}$) de la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{F}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

Correction : on procède par étapes

– *la matrice P est symétrique, car, en utilisant plusieurs propriétés matricielles connues, on a*

$${}^tP = {}^t\left(M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM\right) = {}^t({}^tM){}^t\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM = M\left({}^t({}^tMM)\right)^{-1}{}^tM = P.$$

– *ensuite, on a bien*

$$P^2 = M({}^tMM)^{-1}({}^tMM)\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM = M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM = P.$$

– *P est donc la matrice d'une projection orthogonale p, et en notant $\mathcal{G} = Im(p)$, il nous faut donc montrer que*

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}$$

La première inclusion est aisée : si $u \in \mathcal{G}$, ses coordonnées s'écrivent sous la forme PV, or $PV = M\Lambda$ (où $\Lambda = ({}^tMM)^{-1}({}^tM)V$) donc appartient à $\mathcal{F}$ (cf question 2a).

Il nous reste donc à établir que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Soit $u \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire (cf question 2a) le vecteur u a pour vecteur de coordonnées la matrice colonne $U = M\Lambda$ où Λ est une matrice colonne ${}^t(\lambda_1 \ldots \lambda_p)$.
Par conséquent, puisque $p(u)$ a comme coordonnées PU, on a

$$PU = PM\Lambda = M({}^tMM)^{-1}({}^tMM)\Lambda = M\Lambda = U,$$

autrement dit $p(u) = u$, donc $u \in Im(p)$ (et même plus : la projection p laisse $\mathcal{F}$ invariant), donc $\mathcal{F} \subset Im(p) = \mathcal{G}$, CQFD.