ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice M suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

   Pour quelles valeurs de m cette matrice est-elle inversible ? Calculer, dans ce cas, la matrice inverse M^{-1}.

2. Soient a, b, c dans $\mathbb{R}$. Résoudre, en utilisant le 1), le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + (m-2)z & = & a \\ 2x + (m-4)y - 2z & = & b \\ (m+2)x - 4y - 3z & = & c \end{array} \right.$$

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(e_1) & = & e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) & = & -e_1 + (m-4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) & = & (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{array} \right.$$

   (a) Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

   (b) Pour quelles valeurs de m, l'application f est-elle bijective ? Donner, dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

   (c) Pour quelles valeurs de m, les sous-espaces $Ker f$ et $Im f$ de E sont-ils supplémentaires ?

EXERCICE N^{0}2

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? En particulier, préciser leur ordre de multiplicité.

2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier soigneusement la réponse.

3. Lorsque $m = 2$, déterminer une base de vecteurs propres de f puis calculer A^k, pour tout entier $k \geq 1$.

Problème

On se place dans un espace euclidien $(\mathcal{E}, < \cdot, \cdot >)$ de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

Remarque : dans l'énoncé, des précautions sont prises pour distinguer un élément de $\mathcal{E}$ de la matrice colonne des coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. On recommande aux candidats de prendre les mêmes précautions dans leur copie. On rappelle également que si u et v sont deux éléments de $\mathcal{E}$ de matrices colonnes de coordonnées U et V dans la base $\mathcal{B}$, alors on a l'écriture $< u, v >= {}^tUV$, où ${}^tU$ est la matrice transposée de U.

1. On rappelle qu'une projection est un endomorphisme p de $\mathcal{E}$ qui est idempotent ($p^2 = p$), et que la projection orthogonale sur un sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est la projection p telle que $\mathcal{F} = Im(p) \perp Ker(p)$.

   (a) Montrer que si p est une projection et que la matrice P de p par rapport à la base $\mathcal{B}$ est symétrique, alors p est une projection orthogonale.

   (b) Soit la matrice

   $$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Montrer que P est la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, d'une projection orthogonale p sur un sous-espace $\mathcal{F}$ dont on déterminera une base dans $\mathcal{E}$.

2. Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n$ de $\mathcal{E}$, et $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une base de $\mathcal{F}$.

   On note $V_1, V_2, \ldots, V_p$ les matrices colonnes $n \times 1$ des coordonnées des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ dans la base $\mathcal{B}$, et M la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les V_i.

   On considère la matrice ${}^tMM$ $(p \times p)$, dont le coefficient d'ordre (j, k) est $< v_j, v_k >$.

   (a) Montrer que le sous-espace $\mathcal{F}$ est exactement constitué des vecteurs de $\mathcal{E}$ dont la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M\Lambda$ où Λ est une matrice colonne $p \times 1$ (cette propriété sera utile à plusieurs reprises lors de la résolution de cet exercice).

   (b) Justifier l'inclusion $Ker(M) \subset Ker({}^tMM)$.

   (c) Soit $U = {}^t(U_1\, U_2\, \ldots\, U_p)$ une matrice colonne telle que ${}^tMMU = 0$, et w le vecteur de $\mathcal{E}$ défini par $w = \sum_{i=1}^{p} U_k v_k$: la matrice colonne des coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ est donc MU.

   Montrer que $< v_j, w >= 0$ pour tout $j = 1, .., p$, et en déduire que $w = 0$. Justifier alors l'égalité $Ker(M) = Ker({}^tMM)$.

   (d) En déduire que ${}^tMM$ a même rang que M.

   (e) Montrer que ${}^tMM$ est inversible.

   (f) Puisque ${}^tMM$ est inversible, il est donc possible de considérer la matrice

   $$P = M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM$$

   Montrer que P est la matrice (par rapport à la base $\mathcal{B}$) de la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{F}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.