AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

On dit qu'une matrice carrée (de taille n) A est nilpotente s'il existe un entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$.

1. Calculer M^p et N^p, pour tout entier $p \geq 1$, pour les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M^4 = 0,\ M^p = 0 \textit{ pour } p \geq 4.$$

et

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad N^3 = 0,\ N^p = 0 \textit{ pour } p \geq 3.$$

2. Montrer que si A est nilpotente alors elle ne peut pas être inversible (*indication : on pourra utiliser r_0, le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$*).

Solution

Soit r_0 le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$. Si A était inversible d'inverse A^{-1}, on aurait d'abord A non nulle, et ensuite $A^{r_0} = 0$ donc en multipliant $r_0 - 1$ fois A^{r_0} par A^{-1}, on trouverait $A = 0$, ce qui est contradictoire.

3. Montrer que si A est nilpotente alors $I - A$ est inversible et son inverse est

$$I + A + A^2 + \ldots + A^r,$$

pour un entier r à préciser.

Solution

Soit r_0 le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$. En remarquant que

$$(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^{r_0-1}) = I-A^{r_0} = I \quad \textit{et} \quad (I+A+A^2+\ldots+A^{r_0-1})(I-A) = I-A^{r_0} = I$$

on en déduit la réponse à la question, avec $r = r_0$.

4. En utilisant les questions précédentes (sans calculer de déterminant, ni résoudre de système), montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse T^{-1}.

Solution

On a $T = I - N$ *où* N *désigne la matrice nilpotente étudiée dans la question 1. Par conséquent, on déduit de la question précédente que* $T = I - N$ *est inversible et d'inverse*

$$T^{-1} = I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer qu'une matrice nilpotente (non nulle) n'admet que 0 comme valeur propre et qu'elle n'est donc pas diagonalisable.

   Solution

   Soit M *une matrice nilpotente non nulle. Supposons que* λ *soit une valeur propre non nulle de* M*. Il existe alors u vecteur non nul tel que* $Mu = \lambda u$*. Si* r *désigne un entier* > 0 *tel que* $M^r = 0$*, on a alors* $0 = M^r u = \lambda^r u$ *donc, puisque* $\lambda \neq 0$*,* u *est nul, ce qui est impossible. On a donc démontré par l'absurde qu'il ne pouvait pas exister de valeur propre non nulle pour* M*.*

   Par conséquent, 0 *est l'unique valeur propre de* M*. Si* M *était diagonalisable,* M *serait donc nécessairement semblable à la matrice diagonale ne comportant que des* 0 *sur sa diagonale, càd il existe une matrice inversible* P *telle que* $P^{-1}MP$ *soit la matrice nulle. Ceci implique nécessairement que* M *est la matrice nulle, ce qui n'est pas possible par hypothèse de travail.*

EXERCICE N^{0}2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de triangulariser cette matrice.

1. Montrer que 3 et -1 sont les valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

   Solution

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)(-2)((-5-\lambda)(7-\lambda)+32) = -2(1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\
&= -2(1+\lambda)^2(\lambda - 3)
\end{aligned}$$

   donc 3 *est valeur propre simple et* -1 *est valeur propre double.*

$$(A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z &=& 0 \\ 4x - 10y + 8z &=& 0 \\ 6x - 7y + 4z &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z &=& 0 \\ -16y + 16z &=& 0 \\ -16y + 16z &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& y \\ 2x &=& y \end{array} \right.$$

donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 *est* $SEP_3 = \{(x, 2x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$, *dont* $u_1 = (1, 2, 2)$ *constitue une base.*

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 4z & = & 0 \\ 4x - 6y + 8z & = & 0 \\ 6x - 7y + 8z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z & = & 0 \\ 0 + 0 + 0 & = & 0 \\ 2y - 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ 2z & = & y \end{array}\right.$$

donc le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 *est* $SEP_{-1} = \{(x, 2x, x); x \in \mathbb{R}\}$, *dont* $u_1 = (1, 2, 1)$ *constitue une base.*

2. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

   Solution

   Comme -1 *est valeur propre double et que le sous-espace propre associé est seulement de dimension 1, on en déduit que* A *n'est pas diagonalisable.*

3. Soient u_1,u_2 et e_1 les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 1)$ et $(1, 0, 0)$. Montrer que (u_1, u_2, e_1) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   Solution

   On trouve que $\det(u_1, u_2, e_1) = -2 \neq 0$ *donc* (u_1, u_2, e_1) *constitue une famille libre dans* $\mathbb{R}^3$*, ce qui en fait une base de* $\mathbb{R}^3$.

4. Montrer que A est semblable, dans cette nouvelle base, à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Solution

   On doit montrer que $T = P^{-1}AP$ *où* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On trouve*

$$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   donc

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROBLÈME

On appelle *Polynômes de Legendre* les polynômes définis par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(X^2-1)^n}{dX^n},\ n \in \mathbb{N}$$

où "$\frac{d^n}{dX^n}$" signifie dérivée $n-$ième.

Rappelons *la formule de Leibniz* dont on aura besoin dans les questions 3.(a), 4.(c) de la partie 1, et 2.(b) de la partie 2 :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où la notation $f^{(n)}$ signifie dérivée $n-$ième de f et $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie 1 :

1. Calculer P_1 et P_2.

   Solution
   On a $P_1 = X$ *et* $P_2 = \frac{1}{2}(3X^2-1)$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ le degré de P_n est n.

   Solution
   Le polynôme $(X^2-1)^n$ *étant de degré* $2n$*, son polynôme dérivé-*$n^{\text{ème}}$ *est de degré* n*, ce qui est donc le cas de* P_n.

   (b) Montrer que le coefficient a_n de X^n dans P_n vaut $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$.

   Solution
   Comme le polynôme $(X^2-1)^n$ *est de degré* $2n$ *et de la forme* $X^{2n}+Q$ *où* Q *est un polynôme de degré* $2n-1$*, son coefficient de degré* $2n$ *est donc égal à* 1*, et par conséquent le coefficient de degré* n *de sa dérivée* $n^{\text{ème}}$ *est égal à* $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)$*. Le coefficient de degré* n *de* P_n *est donc égal à* $\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$.

3. (a) En écrivant $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, montrer que

$$P_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

   Solution
   Il s'agit d'appliquer la formule de Leibniz à $f=(X-1)^n$ *et* $g=(X+1)^n$*, ce qui donne*

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^k(X-1)^n}{dX^k}\,\frac{d^{n-k}(X+1)^n}{dX^{n-k}}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\Big((n)(n-1)\cdots(n-k+1)(X-1)^{n-k}\Big)\times\\
&\qquad\qquad\Big((n)(n-1)\cdots(k+1)(X+1)^k\Big)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\Big((n!/(n-k)!)(X-1)^{n-k}\Big)\Big((n!/k!)(X+1)^k\Big)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.

Solution

Dans l'expression de P_n établie à la question précédente, en prenant l'indéterminée égale à 1 le seul terme de la somme qui n'est pas nul en raison du facteur $(X-1)^{n-k}$ est celui pour lequel $k = n$, donc

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n}(C_n^n)^2(1+1)^n = 1$$

En suivant le même raisonnement, on aboutit à

$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n}(C_n^0)^2(-1-1)^n = (-1)^n.$$

4. Dans la suite, la notation f' désigne la dérivée de f.

(a) Montrer que $[(X^2-1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2-1)^n = 0$ $(*)$.

Solution

C'est évident, puisque la dérivée de $(X^2-1)^{n+1}$ vaut $(n+1)(2X)(X^2-1)^n$.

(b) Montrer que $(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n = 0$ $(**)$.

Solution

Idem, puisque la dérivée de $(X^2-1)^n$ vaut $n(2X)(X^2-1)^{n-1}$, il suffit alors de multiplier par (X^2-1).

(c) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $(*)$, montrer que

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n.$$

Solution

On part de

$$\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}\left\{[(X^2-1)^{n+1}]'\right\} = 2(n+1)\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}(X(X^2-1)^n)$$

ce qui donne, en appliquant la formule de Leibniz à X et $(X^2-1)^n$, et en remarquant que dans la somme qui en découle, il n'y a que 2 termes non nuls (dû au fait que $X^{(0)} = X$, $X' = 1$ et $X^{(k)} = 0$ pour tout $k \geq 2$),

$$\begin{aligned}
2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1} &= 2(n+1)\left[\frac{d^n}{dX^n}(X(X^2-1)^n)\right]' \\
&= 2(n+1)\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{(k)}((X^2-1)^n)^{(n-k)}\right]' \\
&= 2(n+1)\left[C_n^0 X\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n + C_n^1\frac{d^{n-1}}{dX^{n-1}}(X^2-1)^n\right]' \\
&= 2(n+1)\left[2^n(n!)XP_n\right]' + 2(n+1)\times n2^n(n!)P_n \\
&= 2^{n+1}(n+1)!(P_n + XP'_n) + n2^{n+1}(n+1)!P_n
\end{aligned}$$

d'où $P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n$.

Partie 2 : On appelle *Opérateur de Legendre* l'application L définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ L(P) = \frac{d}{dX}((X^2-1)P').$$

où $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.

1. (a) Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme le degré de P est $\leq n$, celui de $(X^2-1)P'$ est inférieur ou égal à $n+1$, donc celui de $L(P)$ est $\leq n$. Ainsi L est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Il suffit alors de démontrer la propriété de linéarité. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} L(\lambda P + Q) &= \frac{d}{dX}\left[(X^2-1)(\lambda P' + Q')\right] \\ &= \lambda \frac{d}{dX}\left[(X^2-1)P'\right] + \frac{d}{dX}\left[(X^2-1)Q'\right] \\ &= \lambda L(P) + L(Q) \end{aligned}$$

(b) Donner la matrice M de L dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution

On doit déterminer les images par L des polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$. On a $L(1) = 0$, $L(X) = 2X$,

$$L(X^k) = \left[(X^2-1)kX^{k-1}\right]' = k(X^{k+1} - X^{k-1})' = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

et ce, pour tout entier k compris entre 2 et n. La matrice M de l'endomorphisme L dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 12 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \ddots & & -n(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de L et montrer que L est diagonalisable.

Solution

On vient de déterminer la matrice M de l'endomorphisme L, qui se trouve être triangulaire, donc on en déduit les valeurs propres de L, qui sont $0, 2, 6, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)$. Elles sont au nombre de $n+1$ et toutes distinctes donc elles sont toutes simples et par conséquent L est diagonalisable.

(b) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $(**)$, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$L(P_n) = n(n+1)P_n$$

et en déduire les vecteurs propres de L.

Solution

On a d'abord

$$L(P_n) = \left[(X^2-1)P_n'\right]' = 2XP_n' + (X^2-1)P_n''.$$

Dérivons maintenant $n+1$ fois le premier membre de la relation $(**)$:

$$\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}\left((X^2-1)[(X^2-1)^n]'\right) - 2n\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}\left(X(X^2-1)^n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X^2-1)^{(k)}[(X^2-1)^n]^{(n+2-k)} \; - \; 2n\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)}[(X^2-1)^n]^{(n+1-k)} \\
&= C_{n+1}^0(X^2-1)[(X^2-1)^n]^{(n+2)} + C_{n+1}^1(2X)[(X^2-1)^n]^{(n+1)} + C_{n+1}^2(2)[(X^2-1)^n]^{(n)} \\
&\qquad -2nC_{n+1}^0(X)[(X^2-1)^n]^{(n+1)} - 2nC_{n+1}^1[(X^2-1)^n]^{(n)} \\
&= (X^2-1)\left[\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n\right]'' + 2(n+1)X\left[\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n\right]' + n(n+1)\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n \\
&\qquad -2nX\left[\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n\right]' - 2n(n+1)\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n \\
&= (2^n(n!)) \times \Big((X^2-1)P_n'' + 2(n+1)XP_n' + n(n+1)P_n - 2nXP_n' - 2n(n+1)P_n\Big) \\
&= (2^n(n!)) \times \Big((X^2-1)P_n'' + 2XP_n' - n(n+1)P_n\Big) \\
&= (2^n(n!)) \times (L(P_n) - n(n+1)P_n)
\end{aligned}
$$

Comme cette expression est nulle, on obtient bien $L(P_k) = k(k+1)P_k$ et ce, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$: P_k est donc vecteur propre de l'endomorphisme L associé à la valeur propre $k(k+1)$.

(c) Expliquer pourquoi $\mathbb{R}_n[X] = Vect(P_0) \oplus \ldots \oplus Vect(P_n)$, où $Vect(P_k)$ est le sous-espace vectoriel engendré par P_k. Que peut-on dire de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$?

Solution

On vient d'établir que les sous-espaces $Vect(P_0), \ldots, Vect(P_n)$ sont les sous-espaces propres de l'endomorphisme L de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme on a montré que L était diagonalisable, on sait alors que ces sous-espaces sont en somme directe et que $\mathbb{R}_n[X]$ est égal à cette somme directe $Vect(P_0) \oplus \ldots \oplus Vect(P_n)$. La famille des $(n+1)$ vecteurs $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ forme donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 3 : Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit, pour tous P et Q, le produit scalaire

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

et la norme euclidienne $||P|| = \sqrt{< P, P >}$. Le but de cette partie est de montrer que les Polynômes de Legendre vérifient :

$$< P_i, P_j >= 0 \text{ pour tous } i \neq j \text{ et } ||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ pour tout } n \geq 0$$

et donc que la base $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthogonale.

1. (a) Montrer que pour tous i et j, $< L(P_i), Pj > = < P_i, L(P_j) >$ (*indication* : effectuer une intégration par parties).

Solution

On a

$$
\begin{aligned}
< L(P_i), P_j > &= \int_{-1}^{1} L(P_i)(t)P_j(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{d}{dt}[(t^2-1)P_i'(t)].P_j(t)\,dt \\
&= \Big[(t^2-1)P_i'(t)P_j(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P_i'(t)P_j'(t)\,dt \\
&= -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P_j'(t)P_i'(t)\,dt \\
&= \; < L(P_j), P_i > \; = \; < P_i, L(P_j) >
\end{aligned}
$$

(b) En déduire que pour tous $i \neq j$, $< P_i, P_j >= 0$.

Solution

Soit $i \neq j$. Puisque $L(P_i) = i(i+1)P_i$ et $L(P_j) = j(j+1)P_j$, le résultat précédent implique que

$< i(i+1)P_i, P_j >=< P_i, j(j+1)P_j >$ *donc* $i(i+1) < P_i, P_j > -j(j+1) < P_i, P_j >= 0$

or $i \neq j$ donc nécessairement $< P_i, P_j >= 0$.

2. (a) Soient $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ les coordonnées de P'_{n+1} dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$, montrer que

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt = \beta_n ||P_n||^2.$$

Solution

On a $P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k$ donc, en vertu du résultat de la question précédente

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt &= < P'_{n+1}, P_n > = < \sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k, P_n > \\
&= \sum_{k=0}^{n} \beta_k < P_k, P_n > = \beta_n < P_n, P_n > = \beta_n \|P_n\|^2
\end{aligned}$$

(b) Montrer que $\beta_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}$, où a_n a été défini dans la partie 1.

Solution

Comme a_{n+1} est le coefficient de degré $n+1$ de P_{n+1}, le coefficient de degré n de P'_{n+1} est $(n+1)a_{n+1}$. Or, par définition des β_k et de a_n, on sait que le coefficient de degré n de $P'_{n+1} = \beta_0 P_0 + \ldots + \beta_n P_n$ est égal à $\beta_n a_n$, puisque P_n est le seul des P_k a avoir un coefficient de degré n non-nul. D'où $\beta_n a_n = (n+1)a_{n+1}$, cqfd.

3. (a) Par intégration par parties et en se servant d'un résultat de la partie 1, montrer que

$$\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt = 2 - 2\int_{-1}^{1} tP'_n(t)P_n(t)dt.$$

Solution

On a, puisque $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt &= \left[t(P_n(t))^2\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t.2P'_n(t)P_n(t)dt \\
&= 2 - 2\int_{-1}^{1} tP'_n(t)P_n(t)dt
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1}$.

Solution

Il faut utiliser plusieurs des résultats démontrés précédemment. En partant de l'équation de la question 2)a), et en utilisant le fait que

$$tP'_n(t) = P'_{n+1}(t) - (n+1)P_n(t)$$

(question 4 de la partie 1), on a

$$\begin{aligned}
\|P_n\|^2 &= 2 - 2\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt + 2(n+1)\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt \\
&= 2 - 2\beta_n \|P_n\|^2 + 2(n+1)\|P_n\|^2
\end{aligned}$$

donc $(1 + 2\beta_n - 2(n+1))\|P_n\|^2 = 2$. Or

$$\beta_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{(2n)\ldots(n+2)(n+1)} \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = 2n+1$$

d'où $2 = (1 + 2(2n+1) - 2n - 2)\|P_n\|^2 = (2n+1)\|P_n\|^2$.