ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

L'épreuve est composée de deux exercices et d'un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

EXERCICE N^{0}1

On dit qu'une matrice carrée (de taille n) A est nilpotente s'il existe un entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$.

1. Calculer M^p et N^p, pour tout entier $p \geq 1$, pour les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si A est nilpotente alors elle ne peut pas être inversible (*indication : on pourra utiliser r_0, le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$*).

3. Montrer que si A est nilpotente alors $I - A$ est inversible et son inverse est

$$I + A + A^2 + \ldots + A^r,$$

pour un entier r à préciser.

4. En utilisant les questions précédentes (sans calculer de déterminant, ni résoudre de système), montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse T^{-1}.

5. Montrer qu'une matrice nilpotente (non nulle) n'admet que 0 comme valeur propre et qu'elle n'est donc pas diagonalisable.

EXERCICE N^{0}2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de triangulariser cette matrice.

1. Montrer que 3 et -1 sont les valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
2. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Soient u_1,u_2 et e_1 les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement $(1,2,2)$, $(1,2,1)$ et $(1,0,0)$. Montrer que (u_1,u_2,e_1) forment une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que A est semblable, dans cette nouvelle base, à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROBLÈME

On appelle *Polynômes de Legendre* les polynômes définis par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(X^2-1)^n}{dX^n}, \; n \in \mathbb{N}$$

où "$\frac{d^n}{dX^n}$" signifie dérivée $n-$ième.

Rappelons *la formule de Leibniz* dont on aura besoin dans les questions 3.(a), 4.(c) de la partie 1, et 2.(b) de la partie 2 :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où la notation $f^{(n)}$ signifie dérivée $n-$ième de f et $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie 1 :

1. Calculer P_1 et P_2.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ le degré de P_n est n.
   (b) Montrer que le coefficient a_n de X^n dans P_n vaut $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$.
3. (a) En écrivant $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, montrer que

$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

   (b) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.
4. Dans la suite, la notation f' désigne la dérivée de f.
   (a) Montrer que $[(X^2-1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2-1)^n = 0$ $(*)$.
   (b) Montrer que $(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n = 0$ $(**)$.
   (c) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $(*)$, montrer que

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n.$$

Partie 2 : On appelle *Opérateur de Legendre* l'application L définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ L(P) = \frac{d}{dX}((X^2-1)P')$$

où $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.

1. (a) Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Donner la matrice M de L dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Déterminer les valeurs propres de L et montrer que L est diagonalisable.

   (b) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $(**)$, montrer que pour tout $n \geq 1$,

   $$L(P_n) = n(n+1)P_n$$

   et en déduire les vecteurs propres de L.

   (c) Expliquer pourquoi $\mathbb{R}_n[X] = Vect(P_0) \oplus \ldots \oplus Vect(P_n)$, où $Vect(P_k)$ est le sous-espace vectoriel engendré par P_k. Que peut-on dire de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$?

Partie 3 : Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit, pour tous P et Q, le produit scalaire

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

et la norme euclidienne $||P|| = \sqrt{< P, P >}$. Le but de cette partie est de montrer que les Polynômes de Legendre vérifient :

$$< P_i, P_j >= 0 \text{ pour tous } i \neq j \text{ et } ||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ pour tout } n \geq 0$$

et donc que la base $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthogonale.

1. (a) Montrer que pour tous i et j, $< L(P_i), Pj >=< P_i, L(P_j) >$ (*indication* : effectuer une intégration par parties).

   (b) En déduire que pour tous $i \neq j$, $< P_i, P_j >= 0$.

2. (a) Soient $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ les coordonnées de P'_{n+1} dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$, montrer que

   $$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt = \beta_n ||P_n||^2.$$

   (b) Montrer que $\beta_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}$, où a_n a été défini dans la partie 1.

3. (a) Par intégration par parties et en se servant d'un résultat de la partie 1, montrer que

   $$\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt = 2 - 2\int_{-1}^{1} tP'_n(t)P_n(t)dt.$$

   (b) En déduire que $||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1}$.