

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES



Exercice n° 1

1. On vérifie que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I - M$.

2. On a $M^2 + M - 2I = 0$ et $P(x) = x^2 + x - 2$ répond à la question.

3. M étant symétrique, elle est diagonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour λ valeur propre de M , on a : $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, d'où $\lambda = 1$ ou -2 . La trace étant invariante par changement de base, on a aussi : $1 - 2 + \lambda = \text{Tr}(M) = -3$, d'où $\lambda = -2$. En conclusion, $\lambda = 1$ est une valeur propre simple et $\lambda = -2$ une valeur propre double.

4. Le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ est nécessairement un polynôme du premier degré, c'est-à-dire :

$$X^n = (X^2 + X - 2)Q(X) + (aX + b)$$

Pour $X = 1$, on obtient $1 = a + b$ et pour $X = -2$, $(-2)^n = -2a + b$. La résolution du système donne :

$$a = \frac{1 - (-2)^n}{3} \text{ et } b = \frac{2 + (-2)^n}{3}$$

5. $M^n = (M^2 + M - 2I)Q(M) + (aM + bI)$ et comme $M^2 + M - 2I = 0$, on obtient $M^n = aM + bI$ ou encore,

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 + (-2)^{n+1} & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 + (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

6. On obtient $U_{n+1} = M^n U_1 = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ b+a \\ b+a \end{pmatrix}$, d'où

$$x_{n+1} = y_{n+1} = z_{n+1} = 1$$

Exercice n° 2

1. On vérifie aisément que l'on a une norme, en effet,

$$(1) \|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \text{ (car } f(0) = 0).$$

$$(2) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\| = |\lambda| \times \|f\|$$

$$(3) \forall f, g \in L(E), \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|, \forall x \in E, \text{ d'où } \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

2. Si $I - (P - Q)$ n'est pas inversible, alors

$\exists u \neq 0, (I - (P - Q))(u) = 0$, d'où $u = (P - Q)(u)$ et $\|u\| = \|(P - Q)u\| \leq \|P - Q\| \times \|u\| < \|u\|$, ce qui est impossible.

Comme $I - (P - Q)$ est inversible, il existe un endomorphisme v de E tel que : $(I - (P - Q))v = I$, d'où $P(I - (P - Q))v = P$ ou encore $(P - P^2 + PQ)v = P$ et $PQv = P$ car $P^2 = P$. Pour tout x de E , on a $P(x) = PQ(v(x))$, à savoir $P(E) = PQ(E)$.

Soit $y \in \text{Im}(P)$, alors $y = P(x) = PQ(v(x))$ et $t = Q(v(x)) \in \text{Im} Q$ vérifie $y = P(t)$. P est donc une application bijective.

P étant un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\text{Im}(P)$ et $\text{Im}(Q)$, les dimensions sont égales.



Exercice n° 3

Soit (u_n) une suite de nombres réels. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } r_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$$

1. Pour $n = 2$, $r_2 = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2} = u_1 + \frac{u_2}{2}$. La relation est donc vérifiée.

$$r_{n+1} = r_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n} + \frac{u_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n(n+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_{n+1}}{n+1}$$

$$2. r_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$$

La première série est convergente et le deuxième terme tend vers zéro par hypothèse.

La suite (r_n) a donc une limite finie et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

3. Soit $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Pour n grand, $|s_n| \leq l$ et $\left| \frac{s_n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{l}{n(n+1)}$, donc l'hypothèse 2a) est vérifiée. De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est convergente d'après la question précédente.

4. On vérifie que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0$, et que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ est convergente.

5. On considère la suite (s_n) définie par :

$$s_n = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2k \\ -(2k+1) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}. \text{ Elle vérifie les relations demandées.}$$

En effet :

$$\sum_{k=1}^n \frac{s_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{E(n/2)-1} \frac{1}{2k+2} = \sum_{k=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{1}{2}$$

(série convergente) et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n}$ n'existe pas.

Exercice n° 4



1. On vérifie que $f(-x) = -f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

2. Vérifions que f est dérivable à l'origine : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$.

$$\text{Pour } x \neq 0, f'(x) = \frac{e^{x^2} (2x^2 - 1) + 1}{x^2} = \frac{u(x^2)}{x^2}.$$

Puis $u'(t) = (2t+1)\exp(t)$, donc $u(t) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc bijective et admet une fonction réciproque également impaire.

$$3. e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x^2)^n}{n!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + o(x^{2n-1})$$

Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{n!} + x^{2n-1} \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

On prolonge ε en 0 par $\varepsilon(0) = 0$.

$$4. f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

Pour f^{-1} , il suffit de résoudre le système linéaire obtenu en écrivant :

$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5) \text{ et}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \Rightarrow a_1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}\right) + a_3 \left(x^3 + 3\frac{x^5}{2}\right) + a_5x^5 + o(x^5) = x$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + \frac{2}{3}a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{12}x^5 + o(x^5).$$

Problème :



1. Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h , on a $p \circ p = p$ et $h = \lambda Id$. On obtient $f(x) = p \circ h(x) = \lambda p(x)$. On pose donc $p(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$ et $h(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On vérifie que $f \circ f = \lambda f$.

2. Soit $y \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. On obtient : $f(y) = 0$ et $\exists x \in E / y = f(x)$, d'où $f(y) = f^2(x) = 0 = \lambda f(x)$ et $y = f(x) = 0$

3. Soient $f, g \in L_\lambda$. $(f + g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f + g) \circ (f + g) = \lambda(f + g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f + g) \in L_\lambda$.

Réciproquement, on a :

$$f \circ g + g \circ f = 0 \quad (1)$$

On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2) ;

La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

4. $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g) \circ (f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f)$,
donc $\mu = \lambda_1 \lambda_2$.

$$5. v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aId) \circ (u - aId) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 Id = \lambda(u - aId)$$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abId = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abId$. On trouve donc $\lambda = b - a$.

De même $w \circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aId) + \beta(u - bId)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$



On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v \circ w = w \circ v = 0$.

D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

6. Le polynôme caractéristique de A est

$(\lambda+1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$A^2 - A - 2I = (A+I)(A-2I)$$

On obtient, par exemple, $a = -1$ et $b = 2$.

$$A^n = \frac{2^n}{3}(A+I) - \frac{(-1)^n}{3}(A-2I) = \frac{(2^n + (-1)^n)}{3} A + \frac{(2^n + 2(-1)^n)}{3} I$$