ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 et exprimer M^2 en fonction de M et I, I étant la matrice identité.

2. Trouver un polynôme P du second degré tel que $P(M) = 0$.

3. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses valeurs propres.

4. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$, où $n \in N^*, n > 2$.

5. En déduire M^n.

6. Soit, pour $n > 0$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Résoudre le système $U_{n+1} = M U_n$ de condition initiale $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 2

Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension finie n $(n \geq 1)$. On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E. Pour $f \in L(E)$, on pose :

$$\|f\| = \underset{x \neq 0}{Sup} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

où $\|.\|$ désigne la norme de E.

1. Vérifier que la notation précédente permet de définir une norme sur E.

2. Soient P et Q deux projections définies sur E et telles que $\|P - Q\| < 1$.

Montrer que $I - (P - Q)$ est inversible.

Montrer que l'application P est une bijection de $\mathrm{Im}(Q)$ sur $\mathrm{Im}(P)$ (Im désigne l'image).

En déduire que $\dim \mathrm{Im}(P) = \dim \mathrm{Im}(Q)$.

Exercice n° 3

Soit (u_n) une suite de nombres réels, $n \in N$. A cette suite, on associe deux autres suites (s_n) et (r_n) définies par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$

1. Montrer que $r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{k(k+1)} + \frac{s_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 2$

2. On suppose que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge et que $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = 0$

Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

3. On suppose que la série de terme général u_n converge, montrer alors que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ est aussi convergente.

4. On pose $u_n = (-1)^n$. Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

5. Donner un exemple de suite (s_n) telle que la série de terme général $\frac{s_n}{n(n+1)}$ converge, et $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} \neq 0$.

Exercice n° 4

Soit f l'application définie sur l'ensemble des nombres réels (désigné par R) par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est impaire et continue.

2. Montrer que la dérivée f' garde un signe constant sur R. On pourra étudier la fonction u qui, à tout t réel positif, associe : $u(t) = (2t-1)\exp(t) + 1$.
En déduire l'existence d'une application réciproque de f, impaire.

3. Justifier l'existence d'un développement limité de f en 0 à tout ordre n.

4. Ecrire un développement limité de f en 0 à l'ordre 5 ; donner également un développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Problème

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant $f \circ f = \lambda f$, où λ est un réel non nul.

On note $L_\lambda = \{f | f \circ f = \lambda f\}$.

1. Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

2. Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

3. Soient $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$.

4. Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2.

5. Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à une famille de L_λ et vérifiant $(u - a \times Id) \circ (u - b \times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.

Montrer que $v = u - a \times Id$ et $w = u - b \times Id$ appartiennent à des familles de L_λ.

Ecrire u sous la forme $\alpha v + \beta w$ et en déduire u^n.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A - aI)(A - bI) = 0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.