

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice M .

$\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)(p - q/2 - \lambda)^2$, d'où $\lambda = 1$ est une valeur simple et $\lambda = p - q/2$ est une valeur propre double.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice M .



Si $p - q/2 = 1$, alors $M = I$.

Si $p - q/2 \neq 1$, la matrice M est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = p - q/2$ est égale à deux.

On trouve deux vecteurs propres : $u_2(1, -1, 0)$ et $u_3(0, -1, 1)$. Et $u_1(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

M est diagonalisable et semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p - q/2 & 0 \\ 0 & 0 & p - q/2 \end{pmatrix}$

3. Calculer M^n pour tout entier n .

$M^n = P\Delta^n P^{-1}$, avec $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p - q/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p - q/2)^n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient $M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(p - q/2)^n & 1 - (p - q/2)^n & 1 - (p - q/2)^n \\ 1 - 3(p - q/2)^n & 1 & 1 + 3(p - q/2)^n \\ 1 + (p - q/2)^n & 1 + (p - q/2)^n & 1 - 2(p - q/2)^n \end{pmatrix}$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$

Pour $p - q/2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sinon la convergence n'est pas assurée.

Exercice n° 2



Soient $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n dt$ et $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$ où n est un entier naturel et x un nombre réel strictement positif.

1. Trouver une relation de récurrence entre $f_n(1)$ et $f_{n-1}(1)$. En déduire la valeur de $f_n(1)$ en fonction de n .

On obtient : $f_0(1) = 1$ et $f_1(1) = 2/3$

A l'aide d'une intégration par parties :

$$f_n(1) = \left[t(1-t^2)^n \right]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt = 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt = 2n \int_0^1 (t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^{n-1} dt$$

$$f_n(1) = -2n f_n(1) + 2n f_{n-1}(1), \text{ d'où } f_n(1) = \frac{2n}{2n+1} f_{n-1}(1)$$

Par récurrence, on obtient : $f_n(1) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

2. Montrer que $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$

$\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \int_0^1 \left(\int_t^1 (1-x^2)^n dx \right) dt$. On fait une intégration par parties, en posant : $u' = 1$

et $v = \int_t^1 (1-x^2)^n dx$ et on obtient immédiatement le résultat : $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{2(n+1)}$.

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 - F_n(1)$

$$u_n = 1 - F_n(1) = \int_0^1 \frac{f_n(1)}{f_n(1)} dt - \int_0^1 \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt = \frac{1}{f_n(1)} \int_0^1 (f_n(1) - f_n(t)) dt = \frac{1}{(2n+1)f_n(1)}$$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{2n+4}$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Exercice n° 3

Soient f la fonction numérique définie sur R^2 par : $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ et $D = R^+ \times R^+$.

1. Calculer $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

Soit $K_n = \{(x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}$.

$$I_n = \iint_{K_n} f(x, y) dx dy = \iint_{K_n} re^{-r^2} dr d\alpha = \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^n re^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-n^2}.$$

$$\text{Et } I = \lim_n I_n = \frac{\pi}{4}.$$

2. En déduire la valeur des intégrales : $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$.

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx \int_0^{+\infty} \exp(-y^2) dy = \left(\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}. \text{ On obtient :}$$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

3. En déduire la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ et interpréter ce résultat.

Par un changement de variable $t = x/\sqrt{2}$, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = 1$. La fonction

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ est positive et d'intégrale égale à 1 sur R , c'est donc une densité et on reconnaît celle de la loi normale centrée réduite.

4. Soit $f_\alpha : R^+ \rightarrow R$ définie par : $f_\alpha(x) = 2\varphi(x)\phi(\alpha x)$, où $\alpha \in R$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ et

$$\phi(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} \varphi(t) dt. \text{ Déterminer } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$$

$$\text{Pour } x=0, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{ et}$$

$$\text{Pour } x \neq 0, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 2\varphi(x)$$

5. Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ dans le cas où $\varphi(x) = x \exp(-x^2)$

$$\text{Pour tout } x, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$$

Exercice n° 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs.

1. Etudier, selon la nature de la série de terme général u_n , la convergence de la série de terme

$$\text{général : } v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Si $\lim_n u_n = 0$, alors v_n est équivalent à u_n et les deux séries sont de même nature.

Si $\lim_n u_n \neq 0$, alors $\lim_n v_n \neq 0$ et les deux séries sont toujours de même nature.

2. Etudier, selon la nature de la série de terme général u_n , la convergence de la série de terme

$$\text{général : } w_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$$

Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim_n u_n = 0$ et w_n est équivalent à u_n , donc la série de terme général w_n converge.

Si la série de terme général u_n diverge et si la suite (u_n) est majorée ($u_n \leq K$), on a :

$$w_n \geq \frac{u_n}{1 + K^2} \text{ et la série de terme général } w_n \text{ diverge également.}$$

Si la série de terme général u_n diverge et si la suite (u_n) n'est pas majorée, on ne peut rien dire sur la série de terme général w_n . Par exemple, pour $u_n = \sqrt{n}$, la série de terme général w_n diverge et pour $u_n = n^2$, la série de terme général w_n converge.



Exercice n° 5

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. On pose $\varphi(x) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a))$.

Déterminer λ et μ de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Comme $\varphi(a) = 0$, il faut aussi $\varphi(b) = \lambda(f(b) - f(a)) + \mu(g(b) - g(a)) = 0$. Parmi les solutions possibles, on trouve : $\lambda_0 = -(g(b) - g(a))$ et $\mu_0 = f(b) - f(a)$. Les autres couples (λ, μ) vérifient : $(\lambda, \mu) = (k\lambda_0, k\mu_0)$.

2. En déduire que : $\exists c \in]a, b[, (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$

On applique le théorème de Rolle à φ sur $[a, b]$, il vient : $\varphi'(c) = 0$, ce qui donne la relation recherchée.

3. En déduire, sous des conditions que l'on précisera que : $\exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Il faut que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ puisque $g(b) - g(a) \neq 0$ par le théorème des accroissements finis appliqué à g sur $[a, b]$.

Exercice n° 6



Trouver toutes les matrices qui commutent avec :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice M est diagonalisable et semblable à : $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $M = P\Delta P^{-1}$ et $\Delta = P^{-1}MP$.

Soit B une matrice qui commute avec M . Posons $X = P^{-1}BP$. On obtient : $MB = P\Delta XP^{-1}$ et $BM = PX\Delta P^{-1}$. Donc $\Delta X = X\Delta$ et il faut et il suffit que X commute avec la matrice diagonale Δ .

En écrivant les produits ΔX et $X\Delta$, on trouve la condition nécessaire et suffisante : X matrice diagonale. Soit $X = \text{diag}(a, b, c)$, on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 4a - 8b + 6c & -8a + 16b - 8c & 16a - 40b + 24c \\ -3a + 3c & 6a - 4c & -12a + 12c \\ -2a + 2b & 4a - 4b & -8a + 10c \end{pmatrix}$$