ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p+q=1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice *M*.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice *M*.

3. Calculer M^n pour tout entier *n*.

4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} M^n$

Exercice n° 2

Soient $f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n \, dt$ et $F_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(t)}{f_n(1)} dt$ où *n* est un entier naturel et *x* un nombre réel strictement positif.

1. Trouver une relation de récurrence entre $f_n(1)$ et $f_{n-1}(1)$. En déduire la valeur de $f_n(1)$ en fonction de *n*.

2. Montrer que $\int_0^1 (f_n(1) - f_n(t))\,dt = \dfrac{1}{2(n+1)}$

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 - F_n(1)$

Exercice n° 3

Soient *f* la fonction numérique définie sur R^2 par : $f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2))$ et $D = R^+ \times R^+$.

1. Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

2. En déduire la valeur des intégrales : $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.

3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\dfrac{x^2}{2})dx$.

4. Soit $f_\alpha : R^+ \to R$ définie par : $f_\alpha(x) = 2\varphi(x)\phi(\alpha x)$, où $\alpha \in R$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{x^2}{2})$ et

$\phi(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} \varphi(t)\,dt$. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} f_\alpha(x)$.

5. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} f_\alpha(x)$ dans le cas où $\varphi(x) = x\exp(-x^2)$

Exercice n° 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs.

1. Etudier, selon la nature de la série de terme général u_n, la convergence de la série de terme général : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

2. Etudier, selon la nature de la série de terme général u_n, la convergence de la série de terme général : $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$

Exercice n° 5

Soient $f, g : [a,b] \to R$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. On pose $\varphi(x) = \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a))$.

Déterminer λ et μ de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

2. En déduire que : $\exists c \in \left]a,b\right[, (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$

3. En déduire, sous des conditions que l'on précisera que : $\exists c \in \left]a,b\right[, \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Exercice n° 6

Trouver toutes les matrices qui commutent avec :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$