AVRIL 2011

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS voie B Option Mathématiques**

**CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

## Exercice n° 1

Soit $E$ le sous espace vectoriel de $R^3$ déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$$

1. Déterminer une base de $E$. On notera $X$ la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de $E$.

On a : $(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$, d'où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calculer la matrice $M = I - XX'$, où $I$ désigne la matrice unité et $X'$ la matrice transposée de $X$.

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$



3. Déterminer les valeurs propres de $M$.
$\det(M - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)(2 + \lambda)$. Les valeurs propres sont donc : -2, 0 et 1.

4. Déterminer les sous espaces vectoriels propres de $M$. Que peut-on constater ?

Le sous espace propre associé à la valeur propre -2 est engendré par le vecteur : (1, 1, -2),

Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par le vecteur : (1, -1, 0),

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur : (1, 1, 1).

On obtient ainsi une base orthonormée, ce qui est toujours vérifié pour une matrice symétrique. On pourrait même choisir une base orthogonale.

**Exercice n° 2**

Etudier la suite $(u_n)$ définie par : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 4$ et $u_0 = 1$.

On vérifie aisément que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$, d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n}(u_1 - u_0) < 0$, la suite $(u_n)$ est donc décroissante.

Si la suite $(u_n)$ converge vers une limite *l*, celle ci doit vérifier l'équation : $l = \frac{1}{2}l - 4$, soit $l = -8$.

On montre facilement par récurrence que $u_n > -8$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante et minorée, elle converge vers $-8$.

Remarque : On peut aussi chercher le réel *k* tel que la suite $v_n = u_n + k$ est une suite géométrique $v_{n+1} = a.v_n$

On trouve *k* = 8, *a* = ½ et donc $v_n \to 0$ et donc $u_n \to -8$.

**Exercice n° 3**



Pour *t* nombre réel strictement positif, on définit la fonction $f_t$ de la variable réelle *x* dépendant du paramètre *t* de la façon suivante :

$$f_t(x) = \frac{1+t}{t+x^2}$$

1. Déterminer, quand ils existent, les réels $M(x)$ et $m(x)$ définis par :

$$M(x) = \underset{t>0}{Max}\ f_t(x)$$
$$m(x) = \underset{t>0}{Min}\ f_t(x)$$

La dérivée de $f_t$ par rapport à la variable *t* est égale à : $f_t^{'}(x) = \frac{x^2-1}{(t+x^2)^2}$

Pour $|x| \geq 1$, $f_t$ est croissante, pour t>0, de $\frac{1}{x^2}$ à 1.

Pour $|x| < 1$, $f_t$ est décroissante, pour t>0, de $\frac{1}{x^2}$ à 1.

On obtient donc :

$$m(x) = \underset{t>0}{Min}\ f_t(x) = \begin{cases} 1/x^2 & si\ |x| \geq 1 \\ 1\ si\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$M(x) = \underset{t>0}{Max}\ f_t(x) = \begin{cases} 1/x^2 & si\ |x| \leq 1 \\ 1\ si\ |x| > 1 \end{cases}$$

2. Représenter les graphes des fonctions M et m.

Les graphes sont simples à tracer et ils sont « complémentaires », puisque $m(x) = Min(1, 1/x^2)$ et $M(x) = Max(1, 1/x^2)$.

3. Etudier les variations de $f_t$ ($t$>0) en fonction de la variable $x$ et tracer son graphe.

La dérivée de $f_t$ par rapport à la variable $x$ est égale à : $f_t^{'}(x) = \dfrac{-2x(1+t)}{(t+x^2)^2}$ et c'est une fonction paire. Cette fonction est décroissante sur $R^+$ de $1+1/t$ à 0. Elle admet une tangente horizontale en $(0, 1+1/t)$. Sa dérivée seconde s'annule pour $x = \pm\sqrt{t/3}$ et la valeur de $f_t$ en ces points est 3(1 + $t$)/4$t$. La fonction est concave sur l'intervalle $\left[-\sqrt{t/3}, +\sqrt{t/3}\right]$ et convexe sinon.

**Exercice n° 4**



1. Pour tout entier $n$ strictement positif, la suite $(\alpha_n)$ est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n),\ \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Exprimer $\alpha_n$ en fonction de $n$ et calculer sa limite.

L'équation associée à la relation de récurrence s'écrit :

$2x^2 - x - 1 = 0$ et les solutions sont : $x = 1$ ou $x = -1/2$.

Le terme général de la suite $(\alpha_n)$ est de la forme : $\alpha_n = \lambda(1)^n + \mu(-1/2)^n$ avec $\alpha_1 = 1 = \lambda + \mu(-1/2)$ et $\alpha_2 = 1/2 = \lambda + \mu(1/4)$. La résolution du système donne : $\lambda = 2/3$ et $\mu = (-2/3)$. On obtient :

$$\alpha_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

Et $\underset{n}{Lim}\,\alpha_n = 2/3$.

2. Pour tout entier $n$, on définit la suite réelle $(x_n)$, récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \times x_n}$$



On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général $x_n$ de la suite.

On vérifie aisément que cette suite $(x_n)$ est bien définie, car toujours strictement positive.

On peut calculer quelques premiers termes, par exemple : $x_2 = 2^{1/2}$ $x_3 = 2^{3/4}$, $x_4 = 2^{7/8}$.

On montre alors par récurrence que $x_n = 2^{\alpha_n}$. En effet : $x_{n+2} = \sqrt{2^{\alpha_{n+1}} \times 2^{\alpha_n}} = (2^{\alpha_{(n+1}+\alpha_n})^{1/2}$ et $x_{n+2}$ est de la forme $2^{\alpha_{n+2}}$ si et seulement si on a la relation : $\alpha_{n+2} = \dfrac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n)$ avec $\alpha_1 = 1$, et $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$. On se trouve dans la situation de la question précédente, donc

$$x_n = 2^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

3. Déterminer la limite de $x_n$ quand $n \to +\infty$.

$$\lim_{n} x_n = 2^{2/3}$$

<u>Remarque</u> : Puisque la suite de terme général $x_n$ est strictement positive, on peut passer au logarithme de base 2. On a alors $\alpha_n = \log_2 x_n$ (le log base 2 est obligatoire pour retrouver les valeurs de $\alpha_1$ et $\alpha_2$ de la question 1.

## Exercice n° 5

On considère $n$ couples fixés $(x_i, y_i)$ de valeurs réelles strictement positives et $\lambda$ un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer une fonction $f$ qui minimise l'expression suivante :

$$L(f,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^1 f''(x)\,dx$$

dans chacun des cas ci dessous :

1. $f(x) = ax$
2. $f(x) = ax^2$
3. $f(x) = ax^2 + bx$

1. Pour $f(x)=ax$, on a : $L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i))^2$ . Cette fonction admet un minimum pour la valeur de $a$ qui annule la dérivée de cette fonction $L$ par rapport à $a$.

On obtient : $2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-2\sum_{i=1}^{n}x_i\ y_i=0$, d'où $a=\dfrac{\sum_i x_i\ y_i}{\sum_i x_i^2}$

2. Pour $f(x)=ax^2$ , $L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i^2)^2+2a\lambda$ . En dérivant par rapport à $a$, on obtient : $2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^4)-2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ y_i+2\lambda=0$, d'où $a=\dfrac{\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda}{\sum_i x_i^4}$

3. Pour $f(x)=ax^2+bx$, $L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i^2-bx_i)^2+2a\lambda$. On dérive par rapport à $a$ et par rapport à $b$.

$L'_a=2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^4)+2b(\sum_i x_i^3)-2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ y_i+2\lambda=0$ et



$L'_b=2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^3)+2b(\sum_i x_i^2)=\sum_i x_i\ y_i$

On a donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a(\sum_i x_i^4)+b(\sum_i x_i^3)=\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda \\ a(\sum_i x_i^3)+b(\sum_i x_i^2)=0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne, en posant $\Delta=(\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i^2)-(\sum_i x_i^3)^2$ :

$$a=\frac{(\sum_i x_i^2)(\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda)-(\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i\ y_i)}{\Delta} \quad \text{et}$$

$$b=\frac{(\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i\ y_i)-(\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda)}{\Delta}$$

**Exercice n° 6**

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est égale à $x$. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on souhaite étudier sa fiabilité. On dispose des expériences suivantes :

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme malades s'est avéré positif dans 98% des cas.

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme saines s'est avéré positif pour une seule personne.

On choisit au hasard une personne de la population et on la soumet au test.

On note *M*= « la personne est malade » et *T*= « la personne a un test est positif ».

Enfin, on note *p(x)* la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer *p(x)* en fonction de $x$.

On a : $p(x) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$ ou encore $p(x) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})}$

D'où $p(x) = \dfrac{P_M(T)x}{P_M(T)x + P_{\overline{M}}(T)(1-x)}$ , car $P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$ où $P_M(T)$ est la probabilité conditionnelle de T sachant M.

Dans l'application numérique : $P(M) = x$ et $P(\overline{M}) = 1 - x$, $P_M(T) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}01$

On obtient :

$$p(x) = \frac{0{,}98x}{0{,}97x + 0{,}01} = \frac{98x}{97x+1}$$



2. Tracer le graphe de la fonction $p$ sur l'intervalle $[0,1]$

Le graphe de la fonction $p$ est une fonction hyperbolique croissante restreinte à l'intervalle $[0,1]$.

3. On considère que le test est fiable quand la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 95%.

Le test est-il fiable si la proportion $x$ d'individus malades est de 5% ?

$$p(0{,}05) = \frac{98 \times 0{,}05}{97 \times 0{,}05 + 1} \approx 0{,}8376 .$$

Le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade.



A partir de quelle proportion $x$, le test est-il fiable ?

On doit résoudre l'équation : $p(x) \geq 0,95$. Soit $\frac{98x}{97x+1} \geq 0,95$ et on obtient $x \geq \frac{19}{117} \approx 0,1624$ .

Le test est donc fiable si au moins 17% de la population est malade.