ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Soit E le sous espace vectoriel de R^3 déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$$

1. Déterminer une base de E. On notera X la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de E.

2. Calculer la matrice $M = I - XX'$, où I désigne la matrice unité et X' la matrice transposée de X.

3. Déterminer les valeurs propres de M.

4. Déterminer les sous espaces vectoriels propres de M. Que peut-on constater ?

Exercice n° 2

Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 4$ et $u_0 = 1$.

Exercice n° 3

Pour t nombre réel strictement positif, on définit la fonction f_t de la variable réelle x dépendant du paramètre t de la façon suivante :

$$f_t(x) = \frac{1+t}{t+x^2}$$

1. Déterminer, quand ils existent, les réels $M(x)$ et $m(x)$ définis par :

$$M(x) = \underset{t>0}{Max}\ f_t(x)$$
$$m(x) = \underset{t>0}{Min}\ f_t(x)$$

2. Représenter les graphes des fonctions M et m.

3. Etudier les variations de f_t (t>0) en fonction de la variable x et tracer son graphe (on regardera la convexité).

Exercice n° 4

1. Pour tout entier n strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n),\ \alpha_1 = 1,\text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de n et calculer sa limite.

2. Pour tout entier n, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \times x_n}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

3. Déterminer la limite de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 5

On considère n couples fixés (x_i, y_i) de valeurs réelles strictement positives et λ un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer une fonction f qui minimise l'expression suivante :

$$L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 + \lambda\int_0^1 f''(x)\,dx$$

dans chacun des cas ci dessous :

1. $f(x)=ax$
2. $f(x)=ax^2$
3. $f(x)=ax^2+bx$

où *a* et *b* sont des nombres réels.

Exercice n° 6

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est égale à *x*. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on souhaite étudier sa fiabilité. On dispose des expériences suivantes :

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme malades s'est avéré positif dans 98% des cas.

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme saines s'est avéré positif pour une seule personne.

On choisit au hasard une personne de la population et on la soumet au test.
On note *M*= « la personne est malade » et *T*= « la personne a un test est positif ».
Enfin, on note *p(x)* la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer *p(x)* en fonction de *x*.

2. Tracer le graphe de la fonction *p* sur l'intervalle $[0,1]$.

3. On considère que le test est fiable quand la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 95%.

Le test est-il fiable si la proportion *x* d'individus malades est de 5% ?
A partir de quelle proportion *x*, le test est-il fiable ?