ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants.

Dans tous les exercices, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit la fonction numérique f définie sur $\left]-1,+\infty\right]$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1. Etudier les variations de f.

2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=\dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n° 2

Soit la suite (S_n) définie, pour $n \in N^*$, par : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=S_{2n}$ et $v_n=S_{2n+1}$. Démontrer que ces suites sont adjacentes.

2. Démontrer que la suite (S_n) converge.

3. Soit x un nombre réel positif, exprimer $\sum_{k=1}^{2n}(-x)^{k-1}$ en fonction de x et $(-x)^{2n}$.

4. Soit la fonction numérique f définie sur R^+ par : $f(x) = Ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$

Etudier les variations de f (on précisera le signe de f, où Ln désigne le logarithme népérien).

5. Comparer $Ln(1+x)$ et $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$

6. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice n° 3

Une entreprise souhaite acquérir une nouvelle boutique. Trois emplacements, notés 1, 2 et 3, sont disponibles. Il a été possible de contrôler le chiffre d'affaires de ces boutiques pendant une semaine (tableau1).

Tableau 1

Jours	**Chiffre d'Affaires journalier des boutiques**		
	1	**2**	**3**
Lundi	60	65	80
Mardi	80	70	20
Mercredi	75	75	40
Jeudi	55	68	110
Vendredi	88	66	10
Samedi	60	63	80
Dimanche	50	60	60

1. Calculer la moyenne des chiffres d'affaires de la semaine pour chaque emplacement.

2. Différents indicateurs statistiques qui peuvent aider l'entreprise à prendre sa décision sont proposés (variance, coefficient de variation) :
Soit X le chiffre d'affaires d'une boutique et x_i le chiffre d'affaires du jour i (i=1,…,7)

Nous rappelons les définitions de ces différents indicateurs.

Indicateurs	Expression
Variance	$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$
Coefficient de variation	$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{\overline{X}}$

Calculer la valeur de ces indicateurs pour chaque boutique.

3. En fonction de tous ces indicateurs, quel emplacement vous semble le meilleur et pourquoi ?

Exercice n° 4

Soit E le sous espace vectoriel de R^3 déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y - z = 0\}$$

1. Déterminer une base de E. On notera X la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de E.

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale (pour le produit scalaire euclidien) sur E, dans la base canonique de R^3.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice M définie par :

$M = X(X'X)^{-1}X'$, où X' désigne la transposée de X.

4. Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la symétrie par rapport à E.

5. Soit D la droite vectorielle de R^3 engendrée par le vecteur $u = (1,1,-1)$.

- Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la projection orthogonale sur D.

- Déterminer, dans la base canonique de R^3, la matrice de la symétrie par rapport à D.

Exercice n° 5

Soit n un entier naturel non nul. Dans R, on considère l'équation (E_n) : $x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) , notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :

$$\frac{Ln\, n}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Ln\, n}{n}$$

(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

3. Montrer que $Ln(u_n)$ est équivalent à $-Ln\,n$ et en déduire que :

$$x_n = 1 - \frac{Ln\, n}{n} + o\left(\frac{Ln\, n}{n}\right)$$